डायोफैन्टाइन समीकरण का हल-भास्कराचार्य द्वारा गणित में किये गये योगदान का तकनीकी विश्लेषण

रमा जैन
रीडर, गणित विभाग
महिला विद्यालय डिग्री कॉलेज, लखनऊ–226018, उ0प्र0, भारत
ramajain26@yahoo.com

सार

भास्कराचार्य मध्ययुगीन भारत के सबसे महान गणितज्ञ हैं। वे मैसूर जिले के एक गाँव में पैदा हुए थे और सन् 1114–1183 के बीच रहे थे। भास्कराचार्य ने 12वीं शताब्दी में गणितीय एवं खगोलीय ज्ञान में अनुकरणीय योगदान दिया। भास्कराचार्य वह पहले व्यक्ति थे जिन्होंने सर आइजक न्यूटन से 500 वर्ष पहले गुरुत्वाकर्षण की खोज की थी। वे प्राचीन एवं मध्ययुग के गणितज्ञों में अद्वितीय थे। भास्कराचार्य ने द्विघातीय डायोफैन्टाइन समीकरण $61x^2 + 1 = y^2$ का हल भी प्रतिपादित किया। यह समीकरण सन् 1657 में फ्रांस के गणितज्ञ पियरे डी फर्मेट द्वारा उठाई गई थी। लेकिन इसका हल 18वीं शताब्दी में यूरोप में ऑयलर के समय तक अज्ञात था। एक डायोफैन्टाइन समीकरण वह है जिसमें केवल पूर्णांक हल ही मान्य है। प्रस्तुत तकनीकी विश्लेषण भास्कराचार्य के गणित को प्रदान इसी योगदान पर आधारित है।

बीज शब्द– डायोफैन्टाइन समीकरण, द्विघातीय समीकरण, भास्कराचार्य का योगदान।

Solution of Diophantine equation-A technical analysis of contribution of Bhaskaracharya to Mathematics

Rama Jain
Reader, Department of Mathematics
Mahila Vidyalaya Degree College, Lucknow-226018, U.P., India
ramajain26@yahoo.com

Abstract

Bhaskaracharya has been called the greatest mathematician of medieval India. He was born in a village of the Mysore district in India and lived between 1114-1185. Bhaskaracharya significantly contributed to mathematical and astronomical knowledge in the 12^{th} century. Bhaskaracharya was the first to discover gravity, 500 years before Sir Isaac Newton. He was the champion among mathematicians of ancient and medieval India. Bhaskaracharya also gave the solutions of Diophantine equations of the second order, such as $61x^2 + 1 = y^2$. This equation was posed as a problem in 1657 by French Mathematician "Pierre de Fermot", but its solution was unknown in Europe until the time of Euler in the 18^{th} century. A Diophantine equation is an equation in which only integer solutions are allowed. The present technical review is based on the contribution of Bhaskaracharya to Mathematics on same fact.

Key words- Diophantine equations, quadratic equations, Bhaskaracharyas contribution.

प्रस्तावना

डायोफैन्टाइन नामक शब्द तीसरी शताब्दी के प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ, अलेक्जैण्ड्रिया के डायोफैन्टस के नाम से उद्धृत है जिसने ऐसे समीकरणों का अध्ययन किया और जो बीजगणित में प्रतीकों का प्रयोग करने वाले प्रथम गणितज्ञ थे। डायोफैन्टाइन समस्याओं के गणितीय अध्ययन को, जिसको डायोफैन्टस ने प्रारम्भ किया था, अब डायोफैन्टाइन विवेचना कहते हैं। गणित में डायोफैन्टाइन समीकरण दो या अधिक अज्ञात चरों के इस प्रकार के बहुघातीय समीकरण हैं जिससे कि सभी अज्ञातों के पूर्णांक हल हों। एक रेखीय डायोफैन्टाइन समीकरण शून्य या प्रथम डिग्री के दो एक घातीय पदों के योगों के बीच समीकरण होता है।

भास्कराचार्य का गणित में योगदान

भास्कराचार्य ने सन् 1150 ई0 में, जब वे 36 वर्ष के थे, "सिद्धांत शिरोमणि" की रचना की थी। उनकी इस विशाल रचना में कुल 1450 पद्य हैं। यह चार भागों में विभाजित है–

1. लीलावती, 2. बीजगणित, 3, गणिताध्याय और 4. गोलाध्याय।

वास्तव में प्रत्येक भाग एक पुस्तक की तरह है। प्रत्येक भाग में पद्यों की संख्या निम्नांकित है–

लीलावती– 278 पद्य, बीजगणित– 213 पद्य, गणिताध्याय– 451 पद्य, और गोलाध्याय– 501 पद्य।

इसमें अंकगणित, बीजगणित, ग्रहों एवं गोले का गणित सम्मिलित है। अपने लेखन में उन्होंने "स्थान चिन्ह" एवं शून्य के अंकगणितीय विशेष गुण का वर्णन किया है और जोर देकर यह कहा है कि किसी भी संख्या को शून्य से विभाजित करने पर अनन्त प्राप्त होता है। वे पृथ्वी की वक्रता के बारे में लिखते हैं कि "किसी भी वृत्त की परिधि का सौवां भाग सरल रेखा प्रतीत होता है। हमारी पृथ्वी एक बड़ा गोला है और इसी कारण यह समतल दिखाई देती है।" उनके प्रख्यात गणितीय कार्य "लीलावती" एवं "बीजगणितीय" अतुलनीय एवं उनकी अपार बौद्धिक क्षमता के प्रमाण माने जाते हैं। विश्व की अनेक भाषाओं में इसके अनुवाद स्वतः ही इसकी श्रेष्ठता को प्रमाणित करते हैं। "सूर्य सिद्धांत" में उन्होंने गुरुत्वाकर्षण बल पर एक टिप्पणी की है–

"पृथ्वी द्वारा लगने वाले आकर्षण बल के कारण ही वस्तुएं पृथ्वी पर गिरती हैं। अतः पृथ्वी, ग्रह, तारामण्डल, चन्द्रमा और सूर्य इसी आकर्षण के कारण अपनी कक्षाओं में रहते हैं।"

संभवतः सबसे अधिक आश्चर्यजनक खोज उनके अवकल गुणांक के सिद्धांत हैं। उन्होंने दिखाया कि इसे कैसे खगोलीय गणना में प्रयुक्त करते हैं। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि न्यूटन एवं लैब्नीज की अवकलन एवं समाकलन से सम्बन्धित प्राचीनतम खोजें सन् 1660 ई0 में हुई थीं जबकि भास्कराचार्य ने 12वीं शताब्दी में ही इन्हें प्रयोग किया था। इस प्रकार संभवतः वे इस दावे के अधिकारी हैं कि वे मध्ययुगीन भारत के महानतम गणितज्ञ थे।

डायोफैन्टाइन समस्या

डायोफैन्टाइन समस्याओं में अज्ञात परिवर्ती से कम समीकरण होते हैं जिनके सभी समीकरणों में सही कार्य करने वाले पूर्णांक हल सन्निहित होते हैं। ये एक बीजगणितीय वक्र, पृष्ठ व अन्य आकृतियाँ बनाते हैं। x और y अज्ञात चरों और दिये गये नियतांक में कुछ विशेष डायोफैन्टाइन समीकरण निम्नवत हैं–

1. **रेखीय डायोफैन्टाइन समीकरण**– सरलतम रेखीय डायोफैन्टाइन समीकरण $ax + by = c$ के रूप में होती है जहाँ a, b और c दिये गये पूर्णांक हैं। इसके हल को निम्नलिखित प्रमेय द्वारा पूर्णरूप से वर्णित कर सकते हैं–

"डायोफैन्टाइन समीकरण $ax + by = c$ जहाँ x और y पूर्णांक हैं, का हल सम्भव होगा यदि और केवल यदि c; a और b का महत्तम समापवर्तक होगा। इसके अतिरिक्त यदि (x, y) एक हल है तो दूसरा हल (x+kv, y-ku) प्रकार का होगा, जहाँ k एक पूर्णांक है, और u तथा v क्रम ाः a और b के महत्तम समापवर्तक द्वारा a और b से जुड़े हुए हैं।"

2. **द्विघातीय डायोफैन्टाइन समीकरण**– दो परिवर्ती x और y में एक सामान्य द्विघातीय डायोफैन्टाइन समीकरण

$ax^2 + by^2 = k$ है, जहाँ a, b और k विशिष्ट, धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांक हैं और x और y समीकरण को संतुष्ट करने वाले पूर्णांक हैं जिनका मान प्रात करना है।

दूसरे उदाहरण के तौर पर– $ax^2 + 1 = y^2$, जहाँ a एक पूर्णांक है, एक विशेष प्रकार का समीकरण है जिसका नाम एक अंग्रेज गणितज्ञ जॉन पेल के नाम पर पेल समीकरण है। इस समीकरण का अध्ययन 7वीं शताब्दी में गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त ने किया था जबकि 17वीं शताब्दी में फर्मेट ने इसका अध्ययन किया था। इस समीकरण के साथ जुड़ी एक रोचक कहानी है। प्रसिद्ध फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे डी फर्मेट(1601–1664) ने अपने मित्र बेसी से इस समीकरण को हल करने को कहा। बेसी, आधुनिक शकुन्तला देवी की तरह अपने मस्तिष्क में समस्याएं हल किया करता था। बेसी इसको हल करने में असमर्थ रहा। इसके 100 वर्ष बाद एक दूसरे फ्रांसीसी वैज्ञानिक ने इस समस्या को हल किया। लेकिन यह तरीका बहुत लम्बा था और इससे एक विशेष हल ही प्राप्त होता था जबकि भास्कराचार्य ने इसके पाँच दशाओं के लिए हल प्राप्त किया था जो कि इस प्रकार है– a=8, 11, 32, 61 और 67।

उदाहरण के तौर पर समीकरण $61x^2 + 1 = y^2$ का हल x=226153980 और y=1766319049 है, इसको प्रमाणित करना ही एक व्यक्ति के लिए बहुत बड़ा प्रयास है। इसी वजह से तथाकथित पेल के समीकरण के नाम से जानना चाहिए।

भास्कराचार्य ने बड़ी समस्याओं के वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल निकालने के सरल तरीके बताये। उन्होंने पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति मात्र दो पंक्तियों में दी थी।

निष्कर्ष

उनका कार्य अपने नियमबद्ध तरीकों, उन्नत विधियों और नये विषयों के लिए अद्वितीय है। इसके अतिरिक्त "लीलावती" में उच्चकोटि की सृजनात्मक समस्याएं निहित हैं और यह भी माना जाता है कि भास्कराचार्य का विचार था कि एक छात्र स्वयं को विधियों के यांत्रिकी उपयोग से सम्बद्ध कर सके। भास्कराचार्य के बहुत से गणितीय कार्य बाद में यूरोपीय और फारसी गणितज्ञों द्वारा प्रतिपादित किए गये। उनके बहुत से कार्यों की वजह से यूरोपीय और फारसी गणितज्ञों की कल्पना शक्ति में वृद्धि हुई और उन्होंने शोध के माध्यम से प्रसिद्धि और लोकप्रियता हासिल की। भास्कराचार्य को एक पद्य रचयिता कहते हैं, लेकिन सम्भवतः वह वेदों के ज्ञाता भी थे, क्योंकि अपने पदों में उन्होंने "परमब्रह्म" जैसे शब्द भी प्रयुक्त किये हैं। संक्षेप में हम यह कह सकते हैं कि भास्कराचार्य प्राचीन एवं मध्ययुगीन भारत के गणितीय आकाश के वह चमकते सितारे हैं जिन्होंने कई देशी व विदेशी गणितज्ञों को सही मार्ग दिखाया। हमें आज भी उनसे प्रेरणा मिलती है।

सन्दर्भ

1. शुक्ल, के0 शंकर (1960) "भास्कर प्रथम और उनकी कृतियाँ", भाग–2, महाभास्करीय संस्कृत, लखनऊ।
2. शुक्ल, के0 शंकर (1963) "भास्कर प्रथम और उनकी कृतियाँ", भाग–3, महाभास्करीय संस्कृत, लखनऊ।

3. शुक्ल, के0 शंकर (1971) "सातवीं सदी में हिन्दू गणित", आर्यभटीय पर भास्कर प्रथम की समीक्षा से, गणित, मु0पृ0 115–130।

4. जोशी, केदार दत्त (1988) "श्रीमद्भास्कराचार्य विरीचते सिद्धांत गिरोमणौ–गोलाध्याय", प्रकाशक–मोतीलाल बनारसी दास, दिल्ली।

5. युले, गुणाकर (2001) "भास्कराचार्य", ज्ञान विज्ञान प्रकाशन, नई दिल्ली।

6. उपाध्याय, विजय कुमार (2010) "प्राचीन भारत के महान वैज्ञानिक–भास्कराचार्य", अभिव्यक्ति–हिन्दीडॉटऑर्ग/विज्ञान–वर्ता।