रामानुजन की लगातार भिन्नों का एक परिचय

रमा जैन
एसोसिएट प्रोफेसर, गणित विभाग
महिला विद्यालय डिग्री कॉलेज, लखनऊ–226018, उ0प्र0, भारत
ramajain26@yahoo.com

प्राप्त तिथि– 02.06.2015, स्वीकृत तिथि– 25.06.2015

सार

लगाातार भिन्न, भिन्न लिखने का एक अलग तरीका है। रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्न को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है–

$$R(q)=\cfrac{q^{1/5}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\dots}}}}, \quad |q|<1$$

जी0 एच0 हार्डी को लिखे अपने पहले दो पत्रों में और अपनी नोटबुक में रामानुजन ने रोजर्स–रामानुजन के लगातार भिन्नों से सम्बन्धित कई प्रमेयों को उल्लिखित किया है। सन् 2000 में ब्रूस सी0 बर्न्ट ने विलुप्त नोट बुक में पाये गये रोजर्स–रामानुजन एवं विस्तृत रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्नों के बारे में बहुत से दावों का सिद्धीकरण प्रस्तुत किया। ये भिन्न, एक आयत को वर्ग में बांटने की जिगसॉ पहेली(Jigsaw Puzzle) समस्या से भी सम्बन्धित है। प्रस्तुत लेख रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्नों से सम्बन्धित एक संक्षिप्त अध्ययन है।

बीज शब्द– भिन्न, रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्न, जिगसॉ पहेली समस्या।

An introduction to Ramanujan's continued fractions

Rama Jain
Associate Professor, Department of Mathematics
Mahila Vidyalaya Degree College, Lucknow-226018, U.P., India
ramajain26@yahoo.com

Abstract

Continued fraction is a method of writing a fraction in a different way. The Rogers- Ramanujan continued fraction is defined as

$$R(q)=\cfrac{q^{1/5}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\dots}}}}, \quad |q|<1$$

In his first two letters to G.H. Hardy, and his note book, Ramanujan recorded many theorems about the Rogers-Ramanujan continued fractions. In the year 2000, Bruce C. Burnt, provided proof for many of claims about the Rogers-Ramanujan and generalized Rogers-Ramanujan continued fractions, found in the lost note book. These fractions are also related to Jigsaw Puzzle

problems of dividing a rectangle into squares. Present paper is a conclusive study of Rogers-Ramanujan continued fractions.

Key words- Fractions, Rogers-Ramanujan continued fractions, Jigsaw Puzzle problems.

1.परिचय

प्रारम्भिक संख्या सिद्धांत में वर्णित सम्भवतः प्रथम अनन्त लगातार भिन्न निम्नांकित है–

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{1.1}$$

तथा

$$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\dots}}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{1.2}$$

इन लगातार भिन्नों को निम्न प्रकार से एक लाइन में भी सुविधाजनक रूप से दर्शाया जा सकता है–

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\dots}}}=b_0+\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+\dots}$$

रामानुजन के कार्यकाल में सबसे ज्यादा चर्चित प्रमेयों में से एक रोजर्स–रामानुजन की लगातार भिन्न की प्रमेय है जो कि निम्न प्रकार से है–

$$C(q)=1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\cfrac{q^4}{1+\dots}}}}=\prod_{n-0}^{\infty}\frac{(1-q^{5n-2})(1-q^{5n+3})}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

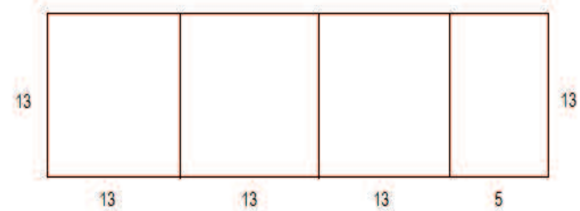
2. लगातार भिन्न क्या है ?

सर्वप्रथम हम लगातार भिन्न के बारे में एक आसान तरीके से समझेंगे। लगातार भिन्न(continued fractions) भिन्न को लिखने का एक अलग तरीका है। इन भिन्नों का एक आयत को वर्ग में बांटने की जिगसॉ पहेली(Jigsaw Puzzle) समस्या से भी सम्बन्ध है जो कि निम्न प्रकार से समझी जा सकती है।

जिगसॉ पहेली(Jigsaw Puzzle) समस्या द्वारा लगातार भिन्न बनाना

इसके लिए हम इवांसविल यूनिवर्सिटी, यू0एस0ए0, के क्लार्क किम्बर्लिंग की चित्र परिपाटी का प्रयोग करेंगे। यह परिपाटी सन् 1951 में एन0एन0 वोरोब इव द्वारा चिन्हित की गई थी।

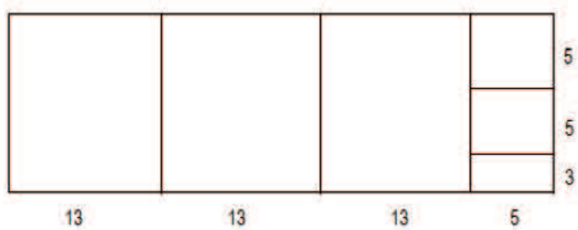
उदाहरण– लगातार भिन्न को समझाने के लिए एक उदाहरण के तौर पर हम एक साधारण भिन्न 44/33 को लेंगे। हम 44X33 का एक आयत लेंगे और उसको 13X13 के तीन वर्गों एवं 5X13 के एक आयत में बाटेंगे, जैसा कि निम्न चित्र से स्पष्ट है।



अतः

$$\frac{44}{13}=\frac{13+13+13+5}{13}=3+\frac{5}{13}=3+\cfrac{1}{\cfrac{13}{5}}$$

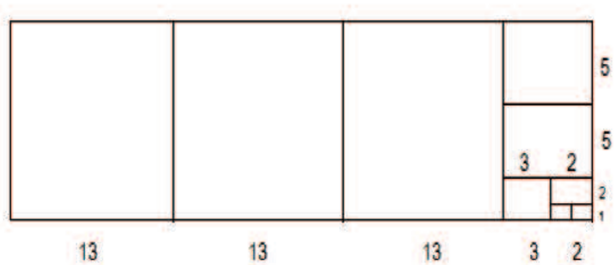
अब यही प्रक्रिया हम $\frac{13}{5}$ के लिए पुनः दोहरायेंगे। इसके लिए हम अंत के 5X13 के आयत को 5X5 इकाई के दो वर्ग तथा 3X5 इकाई के एक आयत में बाँट लेंगे। जैसा कि निम्न चित्र से स्पष्ट है।



और

$$\frac{44}{13}=3+\cfrac{1}{\cfrac{13}{5}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}$$

यहाँ पर हम साधारण भिन्न को लगातार भिन्न के क्रम में लिखते जा रहे हैं। अब इस **3X5 के आयत को 3X3 इकाई के एक वर्ग तथा 2X3 इकाई के एक आयत में बाटेंगे। फिर 2X3 इकाई के आयत को 2X2 इकाई के वर्ग तथा 2X1 इकाई के आयत में बाटेंगे और अंत में 2X1 इकाई के आयत को 1X1 इकाई के वर्ग में बाटेंगे। जो कि चित्र द्वारा निम्न प्रकार से समझा जा सकता है।**



गणित में इस भिन्न को निम्न प्रकार से निरुपित कर सकते हैं।

$$\frac{44}{13}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

उक्त भिन्न को एक लाइन में निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है।

$$\frac{44}{13}=3+\frac{1}{2+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{2}$$

उपर्युक्त व्यंजक ज्यामिति के वर्ग एवं आयत(Jigsaw) से निम्न प्रकार सम्बद्ध होता है–

3 वर्ग	3×3
2 वर्ग	5×5
1 वर्ग	3×3
1 वर्ग	2×2
2 वर्ग	1×1

क्योंकि अंक लगातार कम हो रहे हैं तो शेष आयत का नाप प्रारम्भिक आयत की एक भुजा से हमेशा छोटा होता है। तब यह प्रक्रिया 2×1 के आयत पर समाप्त होती है।

लगातार भिन्न का व्यापक निरुपण

यदि हम कोई भिन्न P/Q लें जहाँ P और Q पूर्णांक हैं तो

$$\frac{P}{Q}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}=a+\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\;\frac{1}{d+\ldots}$$ जहाँ a, b, c, d, ... आदि पूर्णांक हैं।

यदि $\frac{P}{Q}$ का मान 1 से कम है तो प्रथमांक का मान 0(शून्य) होगा। यदि भिन्न का मान 1 से कम है तो हम इसके व्युत्क्रम का प्रयोग करेंगे और इसको पूर्ण भाग हिस्से एवं दूसरा भिन्न जिसका मान 1 से कम है, में बांट सकेंगे। और फिर पूर्व प्रक्रिया को दोहरायेंगे। जब अंश या हर का मान 1 हो जायेगा तो हम इस प्रक्रिया को रोक देंगे। उदाहरण के तौर पर–

$$\frac{5}{27}=0+\cfrac{1}{\cfrac{27}{5}}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{2}{5}}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+1}}}$$

लगातार भिन्न को एकल भिन्न बनाना

उपरोक्त प्रक्रिया को विपरीत दिशा में कार्यान्वित करके हम लगातार भिन्न को एकल भिन्न भी बना सकते हैं। जैसे–

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{16}{5}}}=2+\cfrac{1}{1+\frac{5}{16}}=2+\cfrac{1}{\frac{21}{16}}=2+\frac{16}{21}=\frac{58}{21}$$

बीजगणितीय समीकरण द्वारा लगातार भिन्न प्राप्त करना

यदि हम x परिवर्ती की एक द्विघात समीकरण लें जैसे कि

$$x^2-x=5 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \qquad x(x-1)=5 \text{ or } x=1+\frac{5}{x}$$

दाहिनी ओर x का मान पुनः रखने पर प्राप्त होगा–

$$\Rightarrow \qquad x=1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{x}}$$

इसी प्रक्रिया को पुनः–पुनः दोहराने पर x का मान लगातार भिन्न के रूप में प्राप्त होता है जैसे कि–

$$x=1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\ldots\ldots}}}}=1+\frac{5}{1+}\,\frac{5}{1+}\,\frac{5}{1+\ldots\ldots}$$

दिये गये समीकरण (1) को द्विघातीय विधि से हल करके x का मान निकाल कर हम उपर्युक्त लगातार भिन्न का मान लिख सकते हैं। अतः

$$\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}=1+\frac{5}{1+}\,\frac{5}{1+}\,\frac{5}{1+\ldots\ldots}$$

रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्न(Rogers-Ramanujan continued fractions)

रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्न को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है–

$$R(q)=\cfrac{q^{1/5}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\ldots.}}}}=\frac{q^{1/5}}{1+}\,\frac{q}{1+}\,\frac{q^2}{1+}\,\frac{q^3}{1+\ldots\ldots}, \quad |q|<1$$

यह सर्वप्रथम सन् 1894 में एल0 जे0 रोजर्स के शोधपत्र में उल्लिखित हुआ था। व्यापक लगातार भिन्न के रोजर्स–रामानुजन स्वरूप को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं–

$$R(a;q)=\frac{1}{1+}\,\frac{aq}{1+}\,\frac{aq^2}{1+}\,\frac{aq^3}{1+\ldots\ldots}$$

सन् 2000 में ब्रूस सी0 बर्न्ट ने विलुप्त नोटबुक(Lost Note Book) में पाये गये रोजर्स–रामानुजन एवं व्यापक रोजर्स–रामानुजन लगातार भिन्नों के बारे में बहुत से दावों का सिद्धीकरण प्रस्तुत किया। रामानुजन ने R(q) से सम्बन्धित बहुत सी महत्वपूर्ण प्रमेय दी हैं। ये विशेषतः के0 जी0 रामानाथन के प्रपत्र[3–4] के 1.6 और 1.7 में तथा एन्ड्रयूज और अन्य[1] के मेमॉयर और बर्न्ट[2] की पुस्तक के अध्याय 32 में लिखित है।

निष्कर्ष

लगातार भिन्नों के सिद्धांत को समझ कर रामानुजन की बहुत सी महत्वपूर्ण प्रमेयों को समझा जा सकता है। यह सिद्धांत, संख्या सिद्धांत(Number Theory) में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

संदर्भ

1. एण्ड्रयूज, जी0 ई0 एवं बर्न्ट, बी0 सी0(1992) द कन्टीन्यूड फ्रैक्शन्स फाउण्ड इन द अनऑर्गेनाइज्ड पोर्शन्स ऑफ रामानुजन नोट बुक, मेमॉयर, अमेरिकन मैथेमेटिकल सोसायटी, खण्ड–99, संख्या–477।

2. बर्न्ट, बी0 सी0(1995) रामानुजनः पत्र एवं आख्या, अमेरिकन मैथेमेटिकल सोसायटी, प्रोविडेन्स।

3. बर्न्ट, बी0 सी0 एवं चान, एच0 एच0(1995) सम वैल्यूज फॉर द रोजर्स रामानुजन कन्टीन्यूड फ्रैक्शन्स, कनाडियन जर्नल ऑफ मैथेमेटिक्स, खण्ड–47, मु0पृ0 897–914।

4. बर्न्ट, बी0 सी0(2000) ट्रांजैक्शन्स ऑफ द अमेरिकन मैथेमेटिकल सोसायटी, खण्ड–99, संख्या–5, मु0पृ0 2157–2177।

5. रामनाथन, के0 जी0(1984) ऑन रामानुजन्स कन्टीन्यूड फ्रैक्शन, प्रोसीडिंग्स, इन्डियन एकेडमी ऑफ साइंस, मैथेमेटिकल साइंसेज, खण्ड–93, मु0पृ0 67–77।