पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स

प्रीति बाजपेई
प्रोफेसर, गणित विभाग
एवं डीन, स्टूडेंट वेलफेयर, बी0आई0टी0एस0 पिलानी, यू0ए0ई0 परिसर, दुबई
dr.priti.bajpai@gmail.com

प्राप्त तिथि–01.07.2015, स्वीकृत तिथि–20.07.2015

पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स उन तीन नम्बरों के समूह को कहते हैं जो कि समीकरण $x^2 + y^2 = z^2$ को संतुष्ट करते हैं। वह समकोण त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएं पूर्णांक हों, को पायथागोरियन त्रिभुज कहते हैं। पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स की उपज कब हुई कहना मुश्किल है। कोलम्बिया विश्वविद्यालय के संग्रह में प्लिटन 322 के नाम से जो बेबिलोन्यन टैबलेट्स है उन पर पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स को पाया गया है। इस हिसाब से सबसे पहले बेबिलोन्यन्स को इनके बारे में पता होने का श्रेय जाता है। इन टैबलेट्स का समय करीब 1900- 1600, ईसा पूर्व आंका गया है। यह समय पायथागोरस से 1000 साल पहले का है। पायथागोरस (580- 500 ईसा पूर्व) का जन्म सामोसा के एजियन द्वीप पर हुआ पर कहते हैं कि वह मिस्र से पढ़ाई कर बैबिलोन्या तक गये। कुछ इतिहासकारों के अनुसार पायथागोरस ने इनका ज्ञान वहीं से प्राप्त किया। एक किमवदन्ती यह भी है कि पायथागोरस को अचानक इनकी अनुभूति एक दिन सीढ़ी के नीचे मोजियाइक के टाइल्स पर बने तीन गोले और समकोण त्रिभुज को देख कर हुआ। पर इन नम्बरों को पायथागोरस के नाम के साथ कब और कैसे जोड़ा गया यह कह पाना कठिन है। पायथागोरस और उनके अनुयायी चार प्रकार के विज्ञान के अध्ययन में रत थे। गणित, ज्यामिति, भूमण्डल और गायन। वे जब अपने शोध कार्य को इतना गुप्त रखते थे तो, उनका इन नम्बरों के समूह को पायथागोरस का नाम देना कठिन है। कहा जाता है कि इन नम्बरों को पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स कहलाने का श्रेय सिजैरो, कुछ ग्रीक गणितज्ञों और दार्शनिकों को जाता है[1]।

पायथागोरस से तीन शताब्दी पहले भारत मे बौधायन के सुलभ सूत्र जिसका समय 800 ईसा पूर्व मापा जाता है, में इन नम्बरों के समूह का वर्णन देखा गया है।

"दीर्घ चतुरश्रस्या क्ष्ण्या रज्जुः पार्श्वमानीर्तियङः मानी च यत्पृथ्भूते कुरू तत्से दुभयं करोति।"

इस श्लोक के अनुसार एक रस्सी को कर्ण पर बांधा जाए तो उसका श्रेत्रफल लम्ब व आधार के श्रेत्रफल के जोड़ के बराबर होता है। इस प्रमेय का हल दोनो बौधायन व अपास्स्तम्भ ने दिया है। जिधर बौधायन का हल ज्यामितिय है उधर अपास्स्तम्भ का हल संख्यात्मक है। एक सूत्र ब्रहमगुप्त(598- 670 ईसा पूर्व) ने असंख्य पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स निकालने का दिया है।

फ्रांस के दार्शनिक फ्रान्कोइस वोलाटैर(16 ए.डी.) ने लिखा है जिसका हिन्दी अनुवाद इस प्रकार से है, मेरा यह दृढ़ निश्चय है कि, हर चीज हमारे पास गंगा के किनारे से आयी है। चाहे वह ज्योतिश हो या पुनर्जन्म। पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स दो प्रकार के हैं। अगर तीनों नम्बर का कोइ आम भाजक नहीं है तो उन्हें प्रिमिटिव पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स कहते हैं। अगर प्रिमिटिव पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स को किसी स्थिर राशि से गुणा किया जाये तो यह समूह भी $x^2+y^2=z^2$ को संतुष्ट करता है। इस प्रकार के पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स प्रिमिटिव पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स से बनते हैं।

चलिये देखें कि पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स पर अलग–अलग समय पर और अलग–अलग देशों में गणितज्ञों ने कौन से सूत्र दिये इन ट्रिप्लेट्स निकालने के।

पायथागोरस ने इन ट्रिप्लेट्स को निकालने का जो सूत्र दिया है वह इस प्रकार है उन्होंने एक समकोण त्रिभुज कि छोटी भुजा x को $x=2n + 1$ लिया और बड़ी भुजा y को, $y = 2n^2 +2n$, तथा कर्ण z को $z = 2n^2 +2n +1$ लिया जहाँ $z=y+1$, यहाँ n धनात्मक राशि है। पर प्लाटों का सूत्र कुछ इस प्रकार था:

$x=2n$, $y= n^2 - 1$, $z = n^2 + 1$,

यह देखा जा सकता है कि प्लाटों के सूत्र के अनुसार $z = y + 2$

पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स को दो निम्न समूह में विभजित किया जाता है:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25)...(1)

(8, 15, 17), (12, 35, 37), (16, 63, 65)...(2)

पायथागोरस के सूत्र से समूह (1) के ट्रिप्लेट्स बनते हैं और प्लाटों के सूत्र से समूह (2) के ट्रिप्लेट्स बनते हैं।

यूक्लिड ने भी अपनी किताब ऐलिमेन्ट्स में ट्रिप्लेट्स निकालने के निम्न सूत्र दिये हैं[2]

$$x = \alpha\beta\Upsilon,\ y = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 - \Upsilon^2),\ z = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 + \Upsilon^2)$$

और $$x = \sqrt{mn},\ y = \frac{1}{2}(m - n),\ z = \frac{1}{2}(m + n)$$

मार्कस जूनियस निपस्स ने भी डायोफैन्टस से एक शताब्दी पहले एक भुजा x के सम और विषम दोनों स्थिति में सूत्र दिये हैं जो कि इस प्रकार है:

$$x=n,\ y=\frac{1}{2}(n^2 - 1),\ z = \frac{1}{2}(n^2 + 1) \quad\text{.....(3)}$$

$$x=2n,\ y=\frac{1}{4}n^2 - 1,\ z = \frac{1}{4}n^2 + 1 \quad\text{.....(4)}$$

अगर सूत्र (4) में $x=2n$ कि जगह $x=4n$ लें तो सूत्र यह रूप ले लेता है–

$$x=4n,\ y=4n^2 - 1,\ z = 4n^2 + 1 \quad\text{.....(5)}$$

सूत्र (3) से समूह (1) के ट्रिप्लेट्स मिलते हैं और सूत्र (5) से समूह (2) के ट्रिप्लेट्स मिलते हैं पर $n \geq 2$ और y, z विषम होने चाहियें। डायोफैन्टस(2 ए.डी.) का सूत्र इस प्रकार है: $x=2mn,\ y= m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$, पर इस सूत्र से सिर्फ समूह (2) के ट्रिप्लेट्स की रचना होती है और n का मान 1 मिलता है। अगर $n \geq 4$ और सम हो समूह (2) के ट्रिप्लेट्स मिलते हैं।

अरबी गणितज्ञों ने भी पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स पर कुछ काम किया है। एक हस्तलिपि जिसके लेखक का पता नहीं मे कर्ण की आखिरी संख्या के अनुसार बाकी दो भुजाओं को निकाला गया है। प्रतिबन्ध यह है कि $m + n$ का जोड़ विषम हो और दोनो का कोई सामान्य भाजक न हो। भारत में भास्कर और ब्रहमगुप्त ने जो सूत्र दिया वह इस प्रकार है:
$x=m,\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} - n\right),\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} + n\right)$ लिया। औयलर (17 ए.डी.) जैसे महान गणितज्ञ ने सिद्ध किया कि अगर $x^2 + y^2 = z^2$ तो वहाँ $y:x = m^2 - n^2 : 2mn$ जहाँ $m>n>0$, है।

जापान में भी मातसुनागो(18 ए.डी.) ने डायोफैन्टस का सूत्र तीन प्रकार से सिद्ध किया।

वोलपिसेली(18 ए.डी.) के अनुसार $x^2 + y^2 = z^2$ के $\frac{1}{2}(3^k - 1)$ हल निकलेंगे और z के विभाजन $z = z_1, z_2, \ldots\ldots z_k$ पर निभर करता है। यहाँ z_i, z के गुणनखण्डों का 1,2,3,............k बार गुणक है)[2]। प्यूमा(18 ए.डी.) ने डायोफैन्टस के सूत्र को कौनग्रुएन्स के माध्यम से सिद्ध किया और दिखाया कि x,y,z अगर जोड़े में लिये जायें तो दोनों का कोई सामान्य भाजक नहीं होता है।

देखा जाए तो अभी तक के सभी सूत्र सिर्फ एक प्रकार के ट्रिप्लेट्स देते हैं पर क्रौनेकर(19 ए.डी.) के दिये सूत्र से सभी ट्रिप्लेट्स निकाले जा सकते हैं[2]। $x=2pqt$, $y=t(p^2-q^2)$, $z=t(p^2+q^2)$ जहॅा $p>q>0, t>0$ हैं।
एक सामान्य सूत्र फिटिंग(19 ए.डी.) ने भी दिया जहाँ x, $y=a(2x+a)$, $z = x + a$, तीन भुजाएं हुईं और a को 1,9,25..........विषम संख्या का वर्ग और $2x+a$ क्रमबद्ध विषम संख्या का वर्ग लिया है[2]।

ये तो रहे पायथागोरियन ट्रिप्लेट्स पर वर्षो के शोध कार्य से निकले विभिन्न सूत्र हर सूत्र नए और सुधरे हुए रूप में। यह कौतूहल का विषय है कि ऐसा जिज्ञासा के अलावा क्या था इन ट्रिप्लेट्स में जो गणितज्ञों ने अपना इतना कीमती समय इनके शोध पर व्यतीत किया। इनका कहाँ और कैसे उपयोग हुआ और होता आ रहा है यह विषय बड़ा दिलचस्प है। संक्षिप्त में पुराने समय में इनका प्रयोग खगोल विज्ञान में ग्रहों के बीच की दूरी निकालने में हुआ। क्योंकि ये समकोण त्रिभुज की भुजाएं बनाते हैं तो भवनों के र्निमाण के लिये भी ये उप्युक्त थे और आज भी प्रयोग में लाए जाते हैं। इस कमप्यूटर के युग मे क्रिप्टोग्राफी मे इनका योगदान है[3]। यह एक अलग शोध का विषय है और यहाँ चर्चा करना उचित नहीं।

संदर्भ

1 बरटन, डेविड एम0(2010) एलिमेंट्री नंबर थ्योरी, टाटा मैक्ग्रॉ–हिल, छठा संस्करण।
2 डिकसन, लियोनार्ड यूजीन(2005) हिस्ट्री ऑफ दी थ्योरी ऑफ नंबर्स, खण्ड–दो, डोवर पब्लिकेशन।
3. कक, सुभाष व मनीषा प्रभु(2014) क्रिपटोग्राफिक एप्लीकेशन ऑफ प्रिमिटिव पायथागोरियन डिकसन, क्रिप्टोलॉजिया, खण्ड–38, अंक–3।