कुट्टक विधि–एक तकनीकी दृष्टिकोण

रमा जैन
एसोसिएट प्रोफेसर, गणित विभाग
महिला विद्यालय डिग्री कॉलेज, लखनऊ–226018, उ0प्र0, भारत
ramajain26@yahoo.com

प्राप्त तिथि–30.06.2017, स्वीकृत तिथि–17.09.2017

सार– कुट्टक, रेखीय डायफैन्टाइन समीकरण का पूर्णांक हल प्राप्त करने की एक कलन विधि है। भास्कर ने ax+c=by प्रकार के समीकरण को हल करने के आर्यभट्ट की कुट्टक विधि को सरलीकृत किया। उन्होंने पुर्नजागरण काल से बहुत पहले 12वीं शताब्दी में द्विघातीय अनिश्चित समीकरणों के लिए कुट्टक विधि दी थी। यूरोपियन गणितज्ञों ने इसे 17वीं शताब्दी में प्राप्त किया। इस लेख में कुट्टक विधि के तकनीकी दृष्टिकोण को उजागर किया गया है।

बीज शब्द– कुट्टक विधि, अनिश्चित समीकरण।

Kuttaka method– a technical view point

Rama Jain
Associate Professor, Department of Mathematics
Mahila Vidyalaya Degree College, Lucknow-226018, U.P., India
ramajain26@yahoo.com

Abstract- Kuttaka is an algorithm for finding integer solution of Linear Diophantine Equations. Bhaskara simplified Aryabhatta's "Kuttaka Method" to solve equations of the type ax+c=by. "Kuttaka Method" for solving quadratic indeterminate equations was given by him in 12^{th} century well before the renaissance. European mathematicians got it in the 17^{th} century. In the present article, the technical view point of "Kuttaka Method" has been highlighted.

Key words- Kuttaka metheod, indeterminate equations.

1. **प्रस्तावना**– एक रेखीय डायफैन्टाइन समीकरण ax+c=by प्रकार का एक समीकरण होता है।[1] जहाँ x और y अज्ञात राशियाँ हैं। इसको हल करने की कलन विधि मूल रूप से भारतीय खगोल वेत्ता एवं गणितज्ञ आर्यभट्ट ने खोजी थी तथा इसका वर्णन उन्होंने अपनी कृति "आर्यभट्टिय"(Aryabhattiya) में संक्षेप में किया था। कालान्तर में, भास्कर ने, डायफैन्टाइन समीकरण हल करने की विधि दी जो आर्यभट्ट के कार्य एवं अन्य द्वारा प्रदत्त गणित से श्रेयस्कर विधि थी।[2]

2. **शब्दावली**– आर्यभट्ट ने कलन विधि को कुट्टक नाम नहीं दिया था, और उनकी विधि का विवरण अधिकांशतः अस्पष्ट एवं समझ से परे था। भास्कर ने "आर्यभट्ट भाषा" में खगोलशास्त्र के बहुत से उदाहरण के द्वारा विस्तृत विवरण के साथ अपनी कलन विधि का नाम "कुट्टका" रखा। संस्कृत में "कुट्टक" का अर्थ है "चूर्ण में बदलना"। गणित साहित्य में कुट्टक कलन विधि के अन्य बहुत से नाम प्रचलित हैं जैसे– कुट्टा, कुट्टाकारा, कुट्टीकारा आदि। "देवराजा" द्वारा रचित "कुट्टक शिरोमणि" नामक एक आलेख संस्कृत में उपलब्ध है।[3] विशेषतः कुट्टक परिचर्चा को समर्पित यह विशेष आलेख प्राचीन भारतीय गणितीय साहित्य में बहुत दुर्लभ है।[4]

3. **विवरण**– कलन विधि एक प्रक्रिया है जिसमें दी गई रेखीय डायफैन्टाइन समीकरण के गुणक को छोटे अंकों में जोड़ा जाता है। जिससे छोटे गुणक वाली रेखीय डायफैन्टाइन समीकरण प्राप्त की जा सके। इस प्रकार विघटित समीकरण के हल से मौलिक समीकरण का हल प्राप्त किया जा सके। आर्यभट्ट के पश्चात् बहुत से भारतीय गणितज्ञों ने कुछ परिवर्तन एवं संशोधन के साथ कुट्टक विधि पर वार्तालाप किया। कुट्टक विधि इतनी महत्वपूर्ण समझी जाती है कि बीजगणित के सम्पूर्ण विषय को कुट्ट गणित या कुट्टका कहा जाता है। कभी–कभी रेखीय डायफैन्टाइन समीकरण को हल करने वाले विषय को भी कुट्टक कहा जाता है। कुट्टक की आधुनिक विस्तृत यूक्लीडियन कलन विधि से बहुत समानता है और यह उसका अग्रगामी है। बाद की कलन विधि ax+by=म0स0व0 (a, b) के लिए पूर्णांक x और y प्राप्त करने की विधि है।

4. **समस्या का सरलीकरण**– भास्कर ने उदाहरण के द्वारा निष्कर्ष निकाला कि भाजक और भाज्य, परस्पर भाग के शेषफल से भाग देने पर, एक दूसरे से अभाज्य हैं।

उदाहरण– समस्या कथन– एक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिसको 29 से भाग देने पर 15 शेष बचता है एवं 45 से भाग देने पर 19 शेष बचता है।

5. **हल विधि**–

शेषफल	= 15, 19
बड़ा शेषफल	= 19
बड़े शेषफल के सापेक्ष भाजक	= 45
छोटा शेषफल	= 15
छोटे शेषफल के सापेक्ष भाजक	= 29
शेषफलों का अंतर	= 19–15 = 4

प्रथम चरण– 45÷29, भागफल=1, शेषफल=16
29÷16, भागफल=1, शेषफल=13
16÷13, भागफल=1, शेषफल=03
13÷3, भागफल=4, शेषफल=01
3÷1, भागफल=3, शेषफल=00

परस्पर विभाजन की प्रक्रिया यहीं समाप्त होती है।

6. **वैकल्पिक पूर्णांकों को छांटना**– भागफल = 1,1,1,4,3

प्रथम भागफल को छोड़कर भागफलों की संख्या	= 4(एक सम संख्या)
वैकल्पिक पूर्णांक छांटना	= 2(= k)
अन्तिम भागफल	= 3
वैकल्पिक पूर्णांक एवं अन्तिम भागफल को गुणा करने पर	= 2×3 = 6
उपर्युक्त गुणनफल को शेषफलों के अन्तर से जोड़ने पर	= 6+4= 10

7. **अग्रसारी अंकों का आंकलन**– आंकलन की विधि निम्न प्रकार है–

भागफल 1:	1	1	1	1	(52×1+42)=94
भागफल 2:	1	1	1	(42×1 + 10) = 52	52
भागफल 3:	4	4	(10×4+2)=42	42	
भागफल 4:	3	(2×3+4) = 10	10		
k :	2	2			

8. **हल का आंकलन**–

प्राप्त अंतिम संख्या	= 94
छोटे शेष 15 के सापेक्ष भाजक 29 से 94 को भाग देने पर शेषफल	= 7
बड़े शेषफल 19 के सापेक्ष भाजक 45 को इस शेषफल से गुणा करने पर	= 7×45 = 315
उपर्युक्त में बड़े शेषफल को जोड़ने पर	= 315 + 19 = 334

अभीष्ट हलः संख्या = 334

9. **हल का सत्यापन–**

$$334 = 11 \times 29 + 15$$

$$334 = 7 \times 45 + 19$$

संख्या 334 वह न्यूनतम संख्या है जिसको 29 एवं 45 से विभाजित करने पर क्रमशः 15 व 19 शेष रहता है।

10. **निष्कर्ष**– डायफैन्टाइन समीकरण हल करने की कुट्टक विधि बहुत ही सरल, सहज एवं सटीक है। आर्यभट्ट द्वारा प्रतिपादित कुट्टक विधि का नाम भाष्कराचार्य ने उचित ही रखा है। क्योंकि इस विधि में सभी डायफैन्टाइन समीकरणों के गुणकों को छोटा करते हुए इस समीकरण को हल करते हैं। ब्रह्मगुप्त(628 ई0) के काल से ही भारतीय गणितज्ञों ने द्विघात की बहुत सी कठिनतर डायफैन्टाइन समीकरणों को हल करने के प्रयास किये।[5] लेखक उनकी कुछ अन्य विशेष उपलब्धियों के बारे में अपने अगले आलेख में चर्चा करेंगे।

सन्दर्भ

1. जैन, रमा(2014) डायफैन्टाइन समीकरण का हल– भास्कराचार्य द्वारा गणित में किये गये योगदान का तकनीकी विश्लेषण, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–2, अंक–1, मु0पृ0 142–145।
2. राव, एस0 बालाचन्द्रा(2000) इण्डियन मैथेमेटिक्स एण्ड एस्ट्रोनॉमी, ज्ञानदीप पब्लिकेशन्स, बैंगलोर, भारत।
3. बेल, ए0(1984) नम्बर थ्योरीः एन एप्रोच थ्रू हिस्ट्री फ्राम हम्मूरापी टू लेजेण्डर, बर्कहाउजर।
4. दत्ता, विभूति भूषन(1993) एन्शिएन्ट हिन्दू ज्योमेट्रीः द साइन्स ऑफ द सुलबस, कलकत्ता यूनिवर्सिटी प्रेस, रीप्रिंटेड– कॉस्मो पब्लिकेशन्स, न्यू दिल्ली।
5. जैन, रमा(2016) जैन गणित, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–4, अंक–1, मु0पृ0 60–62।