खण्ड–5, अंक–1, वर्ष–2017, मु0पृ0 154–156, D.O.I. : 10.22445/avsp.v5i01.9871 वैज्ञानिक लेख

गणित के लिए रामानुजन का योगदान

आदित्य अग्निहोत्री
प्रवक्ता व अध्यक्ष, एमा थॉमसन स्कूल, लखनऊ–226001, उ0प्र0, भारत
aditya_agnihotri20@rediffmail.com

प्राप्त तिथि–05.06.2017, स्वीकृत तिथि–31.08.2017

सार– प्रस्तुत लेख में महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन के गणित विषय में योगदान पर प्रकाश डाला गया है तथा रामानुजन योगसूत्र के नवीनतम शोध कार्यों की जानकारी भी दी गयी है।

बीज शब्द– रामानुजन योगसूत्र, रामानुजन नोट बुक, प्राकृतिक संख्या, हाइपरज्योमैट्रिक श्रेणी, बेसिक हाइपरज्योमैट्रिक श्रेणी।

Contribution of Ramanujan to Mathematics

Aditya Agnihotri
Lecturer and Head, Department of Mathematics
Emma Thompson School, Lucknow-226001, U.P., India
adiya_agnihotri20@rediffmail.com

Abstract- Article embodies significant contributions of great mathematician Ramanujan in different branches of Mathematics. The article also provides the knowledge about latest researches related to Ramanujan's Summation formula.

Key words- Ramanujan's Summation formula, Basic hypergeometric series, Basic bilateral series, q-series.

1. **प्रस्तावना**– श्रीनिवास रामानुजन एक महान भारतीय गणितज्ञ थे। रामानुजन ने विश्लेषण एवं संख्या सिद्धान्तके क्षेत्रों में गहन योगदान दिया। गणित के क्षेत्र में अपने समय के अनेक दिग्गजों को पीछे छोड़ने वाले श्रीनिवास रामानुजन ने केवल 32 साल के जीवनकाल में पूरी दुनिया को गणित के अनेक सूत्र एवं सिद्धान्त दिये। रामानुजन ने अपने जीवनकाल में गणित के 3884 प्रमेयों का संकलन किया। इनमें सें अधिकांश प्रमेय सही सिद्ध किये जा चुके हैं। इनके द्वारा किये गये अधिकांश कार्य अभी भी वैज्ञानिकों के लिए अबूझ पहेली बने हुए हैं। इनका एक पुराना रजिस्टर जिस पर वे अपने प्रमेय और सूत्रों को लिख देते थे, सन् 1976 में ट्रिनीटी कॉलेज के पुस्तकालय में मिला। यह रजिस्टर आज भी वैज्ञानिकों के लिए एक पहेली बना हुआ है। इसे बाद में रामानुजन की नोटबुक के नाम से जाना गया। मुंबई के टाटा मूलभूत अनुसंधान संस्थान द्वारा इसका प्रकाशन भी किया गया है।[1]

इलिनॉय विश्वविद्यालय के गणित के प्रोफेसर ब्रूस सी0 बर्नाड्ट ने रामानुजन की तीन पुस्तकों पर 20 वर्षों तक शोध किया और इस शोध का निष्कर्ष पाँच पुस्तकों के संकलन के रूप में प्रकाशित हुआ। रामानुजन के प्रमुख गणितीय कार्यों में एक है किसी संख्या के विभाजनों की संख्या ज्ञात करने के फार्मूले की खोज। उदाहरण–

संख्या 5 के कुल 7 विभाजनों की संख्या इस प्रकार है– 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1
संख्या 4 के 5 विभाजन इस प्रकार है– 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1

रामानुजन के फार्मूले से किसी भी संख्या के विभाजनों की संख्या ज्ञात की जा सकती है। भौतिक जगत की नयी थ्योरी ''सुपर स्ट्रिंग थ्योरी'' में इस फार्मूले का काफी उपयोग हुआ है। रामानुजन ने उच्च गणित के क्षेत्रों जैसे संख्या सिद्धान्त, इलिप्टिक फलन, बेसिक हाईपर ज्योमैट्रिक श्रेणी इत्यादि में अनेक महत्वपूर्ण खोजें की।[2]

2. **गणितीय कार्यः रामानुजन ने निम्नलिखित सूत्र प्रतिपादित किया–**

$$1+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{1.3.5.7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}}=\sqrt{\frac{e.\pi}{2}}$$

इस सूत्र की विशेषता यह है कि गणित की दो सबसे प्रसिद्ध नियतांकों (पाई, π तथा ई, e) का सम्बन्ध एक अनन्त सतत भिन्न के माध्यम से व्यक्त करता है।

पाई का मान ज्ञात करने के लिए रामानुजन के दो सूत्र निम्नलिखित हैं–

$$\pi=\frac{63(17+15\sqrt{5})}{25(7+15\sqrt{5})}$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{1103}{992}$$

3. **रामानुजन संख्याएँ**– रामानुजन संख्या उस प्राकृतिक संख्या को कहते हैं जिसे दो अलग–अलग प्रकार से दो संख्याओं के घनों के योग द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

उदाहरण–

$$1729=9^3+10^3=1^3+12^3$$
$$4104=2^3+16^3=9^3+15^3$$
$$20683=10^3+27^3=19^3+24^3$$
$$39312=2^3+34^3=15^3+33^3$$
$$40033=9^3+34^3=16^3+33^3$$

रामानुजन ने संख्या 1729 को एक अद्भुत संख्या कहा। उन्होंने कहा कि यह वह सबसे छोटी संख्या है जिसे हम दो घन संख्याओं के जोड़ से दो तरीके में व्यक्त कर सकते हैं।

4. **रामानुजन का ${}_1\varphi_1$योगसूत्र**– रामानुजन का प्रसिद्ध ${}_1\varphi_1$योग सूत्र उनकी नोटबुक में इस प्रकार प्रदर्शित है[3]–

$${}_1\varphi_1(a;b;q;z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n$$
$$=\frac{(q,\frac{b}{a},az,\frac{q}{az})_\infty}{(b,\frac{q}{a},z,\frac{b}{az})_\infty}$$

जहाँ $\left|\frac{b}{a}\right|<|z|<1$

रामानुजन के इस सूत्र का बेसिक हाईपर ज्योमेट्रिक थ्योरी में बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान है। रामानुजन के उपरोक्त सूत्र के परिवर्तनों को पिछले कुछ वर्षों के शोध कार्य में ज्ञात किया गया है। इस सूत्र के प्रमुख परिवर्तनों को यहाँ दिया जा रहा है।[4]

1. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(q,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(z)_n}{(q)_n(az)_n}q^n+\frac{(q/z)_\infty}{(b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n$$

2. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(qaz/b)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(b/a)_n}{(q)_n(b)_n}(qaz/b)^n+\frac{(q/b,qb/az)_\infty}{(q/a,b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/a)_n(b/az)_n}{(q)_n(bq/az)_n}(q/b)^n$$

3. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(q,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(z)_n}{(q)_n(az)_n}(q)^n+\frac{(q/b,qb/az)_\infty}{(q/a,b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/a)_n(b/az)_n}{(q)_n(qb/az)_n}(q/b)^n$$

4. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(b/a,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(qza/b)_n(a)_n}{(q)_n(az)_n}\left(\frac{b}{a}\right)^n+\frac{(q/z)_\infty}{(b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n$$

5. **निष्कर्ष**– उपरोक्त तथ्यों के अध्ययन से स्पष्ट है कि रामानुजन बचपन से संख्याओं से इस प्रकार खेलते थे जैसे बच्चा खिलौनों से खेलता है। प्रो0 हार्डी[5] ने रामानुजन के लिए कहा है कि उनकी अस्वस्थता के बावजूद उनका मस्तिष्क अति कुशाग्र था। प्रस्तुत लेख से ज्ञात होता है कि रामानुजन के संख्या सिद्धांत में योगदान एवं उनके द्वारा किये गये अधिकांश कार्य अभी भी हल किये जाने और समझे जाने शेष हैं। रामानुजन के ${}_1\psi_1$ योग सूत्र से विभिन्न परिवर्तनों को प्राप्त करने एवं उन पर शोध कार्य करने की आवश्यकता है और इन परिवर्तनों का उपयोग गणित एवं विज्ञान की अन्य शाखाओं में भी किये जाने की आवश्यकता है।

संदर्भ

1. www.bharatdiscovery.org/india/ श्रीनिवास_अयंगर_रामानुजन।
2. बापजेई, के0 के0 एवं बाजपेई, दिव्यांश(2013) कुशाग्र विलक्षण मेधा– श्रीनिवास आयंगर रामानुजन, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–1, अंक–1, मु0पृ0 262–264।
3. अली, एस0 अहमद एवं अग्निहोत्री, आदित्य(2016) ऑन एप्लिकेशन्स् ऑफ रामानुजनस् सम, जर्नल ऑफ मैथ0 एण्ड कम्प्युटेशनल सांइस, खण्ड–6, अंक–02, मु0पृ0 156–164।
4. जैन, रमा(2015) रामानुजन की लगातार भिन्नों का एक परिचय, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–3, अंक–1, मु0पृ0 77–82।
5. हार्डी, जी0 एच0(1940) रामानुजन, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, ए0एम0एस0, चेल्सी पब्लिकेशन्स, लन्दन।