खण्ड-7, अंक-1, वर्ष-2019, मु0प्र0 92-98
D.O.I.: 10.22445/avsp.v7i1.17

अडोमेन् अपघटन विधि-एक संक्षिप्त परिचय

कान्ती पाण्डेय
प्रोफेसर(से0नि0), गणित विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ–226007, उ0प्र0, भारत
pandey_kanti@yahoo.co.in

प्राप्त तिथि–30.08.2019, स्वीकृत तिथि–05.11.2019

सार– प्रस्तुत लेख में अडोमेन् अपघटन् विधि(एडीएम) द्वारा अवकल समीकरणों का हल निकालने की विधि का संक्षिप्त परिचय दिया गया है। इस विधा की विशेषता उससे प्राप्त सटीक हल को कुछ उदाहरणों द्वारा दर्शाया गया है।

बीज शब्द– अडोमेन् अपघटन् विधि, अवकल समीकरण

Adomian Decomposition Method- a brief introduction

Kanti Pandey
Professor(Retired), Department of Mathematics and Astronomy
University of Lucknow, Lucknow-226007, UP, India
pandey_kanti@yahoo.co.in

Abstract- In present article, an attempt is made to give a brief introduction of Adomian Decomposition Method(ADM) for solving differential equations. Advantage and accuracy of the method is shown by solving some examples.

Key words- Adomian Decomposition Method, differential equations

1. **परिचय**– सर्वप्रथम जॉर्ज अडोमेन् ने अडोमेन् अपघटन् विधि के बारे में अपने लेख में बताया था।[1] इस विधि का प्रयोग गणित, भौतिकी, जीव विज्ञान तथा रसायन शास्त्र से सम्बन्धित रैखिक ओर अरैखिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए किया गया है। अब तक बहुत सारे शोध पत्र अपघटन् विधि की व्यवहार साध्यता को दर्शाते हुए प्रकाशित हो चुके हैं। अपघटन् विधि की मुख्य उपयोगिता यह है कि इस विधि द्वारा प्रत्येक प्रकार के अवकल समीकरणों, चाहे वह एक घाती हो अथवा बहुघाती, समघाती हो अथवा विशमघाती तथा उनके गुणांक अचर अथवा चर हों, का विश्लेषणात्मक लगभग सही हल, बिना रेखिकीकरण, विचलन, सन्निकटन अथवा पृथक्कीकरण विधि के उपयोग के निकाला जा सकता है। चूँकि अपघटन विधि द्वारा प्राप्त हल, सतत्, विश्लेषणात्मक होते हैं और बिना पृथक्कीकरण द्वारा प्राप्त किये जाते हैं, अतः ये अधिकतर भौतिक रूप में अधिक वास्तविक होते हैं।

इस विधा द्वारा प्राप्त हल प्रायः विस्तृत समूह की समस्याओं का त्वरित गति से अभिसारित होने वाले श्रेणी हल के रूप में होते हैं।[2,3] इस विधि की एक और मुख्य विशेषता यह है कि यह विधि अंकीय हल निकालने में गणितीय कार्य लघु करते हुए भी हल की सटीकता सुनिश्चित करती है।[4] नहायू इत्यादि[5] ने एक घातीय अवकल समीकरणों को अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा हल किया है, और प्रदर्शित किया है कि अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा प्राप्त श्रेणी हल प्रत्येक समस्याओं के लिए सटीक हल की ओर अभिसारित होते हैं तथा यह विधि विशेष रूप से प्रथम मूल्य समस्याओं जिनके हल दोलन और घातांक में हैं, अधिक उपयुक्त हैं। जन–शेंग इत्यादि[6] ने अडोमेन् अपघटन् विधि और इसके आंशिक परिवर्तनों, जिनमें विभिन्न प्रकार के परिवर्तन और प्राचल पुनरावृत्ति प्रणाली भी सम्मिलित है, की समीक्षा की है। बैजर और शैफिफ[7] ने अडोमियन् बहुपद गणना के लिए सीधा प्रतीक गणित(ऐल्गॉरिद्म) विकसित किया है। बैजर और पौराबद्[8] ने अडोमेन् बहुपद की गणना के लिए एक मेपल प्रोग्राम भी विकसित किया है। कुमार और सिंह[9] ने परिवर्तित अडोमेन् अपघटन् विधि पर आधारित, विचित्र दो–बिन्दु वाले रैखिक और अरैखिक समस्याओं के हल के लिये, एक प्रभावी अंकीय प्रतीक गणित(ऐलगोरिदम्) निकाला है। सिंह और कुमार[10] ने परिवर्तित अडोमेन् अपघटन् विधि पर आधारित रैखिक तथा अरैखिक समूह के विचित्र दो–बिन्दु–सीमान्त समस्याओं के हल के लिये एक प्रभावी विधि को प्रस्तुत किया। वाजवाज्[11] ने अडोमेन् अपघटन् विधि में एक सशक्त परिवर्तन प्रस्तावित किया है, जो कि श्रेणी हल को तेजी से अभिसारित करता है। उन्होंने परिवर्तित विधि की वैधता उदाहरणों द्वारा प्रमाणित की है और यह निष्कर्ष निकाला है कि परिवर्तित विधि अनुप्रयुक्त विज्ञान के लिये उपयुक्त है।

प्रस्तुत लेख में अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा अवकल समीकरणों का हल निकालने के बारे में संक्षिप्त रूप से बताने का प्रयास किया गया है। इस विधि की उपयोगिता और सटीकता को उदाहरणों द्वारा दर्शाया गया है।

2. **अडोमेन् अपघटन् विधि**– माना

$$Ly + Ry + Ny = g(x) \tag{1}$$

एक अवकल समीकरण है, जहाँ N एक अरैखिक प्राचल है, L उच्च कोटि का अवकलज् है जिसे व्युत्क्रमित माना गया है तथा R एक रैखिक अवकल प्राचल है, जिसकी कोटि L की कोटि से कम है। समीकरण (1) को हम निम्न रूप में प्रदर्शित कर सकते हैंः

$$Ly = g(x) - Ry - Ny \tag{2}$$

चूँकि L व्युत्क्रमित है अतः समीकरण (2) को हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैंः

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \tag{3}$$

जहाँ प्रथम मूल्य समस्याओं के लिये हम L^{-1} को निम्न विधि से परिभाषित कर सकते हैं–

$$L^{-1} = \int_0^x .dx \ , \ \text{जब} \quad L = \frac{d}{dx}$$

$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x .dx \ , \ \text{जब} \quad L = \frac{d^2}{dx^2}$$

....

....इत्यादि।

समीकरण (3) का हल

$$y = A + Bx + L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \tag{4}$$

होगा, जहाँ A और B समाकल अचर हैं और उन्हें प्रथम या सीमान्त प्रतिबन्धों द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा समीकरण (1) का हल लगभग एक अनन्त श्रेणी

$$y(x) = \sum_{x=0}^{\infty} y_n(x) \tag{5}$$

के रूप में दिया जाता है और अरैखिक प्राचल को निम्न रूप में अपघटन् किया जाता हैः

$$N(y) = \sum_{x=0}^{\infty} A_n \tag{6}$$

जहाँ An, $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ के अडोमेन् बहुपद हैं, जिन्हें निम्न रूप में निरुपित किया जा सकता है।

$$A_n = \frac{1}{\lfloor n} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\, N\, (\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i)\,]_{\lambda=0}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots.. \tag{7}$$

सम्बन्ध (5) और (6) को समीकरण (4) में रखने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता हैः

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = A + Bx + L^{-1} g(x) - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} y_n) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (8)$$

समीकरण (8) से हमको निम्न पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त होता है:

$$y_0 = g(x)$$
$$y_{n+1} = -L^{-1}Ry_n - L^{-1}A_n$$

उपर्युक्त पुनरावृत्ति सम्बन्ध द्वारा हम समीकरण (1) का हल निम्न प्रकार से निकाल सकते हैं।

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_n(y) \qquad (9)$$

जहाँ, $$\varphi_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_i \,. \qquad (10)$$

3. **उदाहरण–**

3.1. अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा अवकल समीकरण $dy/dx = y,\ y(0)=1$ का हल निकालिये और दर्शाइये कि वह सैद्धांतिक हल के सन्निकट है।

हल– सैद्धान्तिक रूप से उपर्युक्त अवकलन समीकरण का हल $y=e^x$ है। अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा हल निकालने के लिए हम उपर्युक्त समीकरण को निम्न प्रारूप में लिखेंगे:

$$Ly = y, \qquad y(0) = 1 \qquad (3.1.1)$$

जहाँ, $L=d/dx$ और L^{-1}, L का व्युत्क्रम प्राचल है। समीकरण (3.1.1) के दोनों पक्षों पर व्युत्क्रम प्राचल L^{-1} लगाने पर

$$L^{-1} Ly = L^{-1} y$$

अथवा $$y = y(0) + L^{-1}y \qquad (3.1.2)$$

अडोमेन् अपघटन् विधि का प्रयोग करने पर निम्न पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$y_0 = g(x) = 1$$
$$y_{n+1} = L^{-1}y_n, \qquad n=0,1,2,..........$$

अतः

$$y_1 = L^{-1}y_o = \int_0^x dx = x$$

$$y_2 = L^{-1}y_1 = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_3 = L^{-1}y_2 = \int_0^x \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{3}$$

.... इत्यादि।

इस प्रकार समीकरण (3.1.1) का सन्निकटन हल प्राप्त होता है–

$$y(x) = \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i(x)$$

परन्तु,

$$\varphi_1(x) = y_0(x) + y_1(x) = 1+x$$

$$\varphi_2(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) = 1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}$$

अतः $$y = 1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\ldots\ldots = e^x.$$

3.2 अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा निम्न समीकरण

$dy/dx - y = x$, जहाँ $y(0) = 1$ है का हल निकालिये और दर्शाइये कि वह विश्लेषणात्मक हल के सन्निकट् है।

हल– हम जानते हैं कि दिये हुये अवकल समीकरण का विश्लेषणात्मक हल $y = -(x + 1) + 2\,e^x$ है। अडोमेन् अपघटन् विधि का प्रयोग करने पर हम दिये हुए समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$Ly = y + x, \tag{3.2.1}$$

जहाँ $L=d/dx$ और इसका व्युत्क्रम L^{-1} है। समीकरण (3.2.1) के दोनों पक्षों पर व्युत्क्रम प्राचल का प्रयोग करने पर

$$L^{-1}Ly = L^{-1}y + L^{-1}x,$$

अथवा

$$y = y(0) + L^{-1}(y) + L^{-1}(x) \tag{3.2.2}$$

अडोमेन् अपघटन् विधि का प्रयोग करने पर समीकरण (3.2.2) को निम्न रूप से लिखा जा सकता है:

$$\sum_{x=0}^{\infty} y_n(x) = y = 1 + \frac{x^2}{2} + L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{3.2.3}$$

समीकरण (3.2.3) से निम्न पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं:

$$y_0 = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_{n+1} = L^{-1}y_n, \; n=0,1,2,\ldots..$$

इस प्रकार

$$y_1 = \int_0^x y_0\,dx = \int_0^x (1 + \frac{x^2}{2})dx = x + \frac{x^3}{\lfloor 3}$$

$$y_2 = \int_0^x y_1\,dx = \int_0^x (1 + \frac{x^3}{\lfloor 2})\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{\lfloor 4}$$

$$y_3 = \int_0^x y_2\,dx = \int_0^x (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{\lfloor 4})dx = \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5}$$

.... इत्यादि।

इस प्रकार अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा दिये गये अवकल समीकरण का हल निम्न होगा।

$$y = y_0 + y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1 + x^2 + x + 2\frac{x^3}{\lfloor 3} + 2\frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots$$

अथवा $$y = 1 + x + x^2 + 2\frac{x^3}{\lfloor 3} + 2\frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

विश्लेषणात्मक हल

$$y = -(x+1) + 2e^x = 1 + x + x^2 + 2\frac{x^3}{\lfloor 3} + 2\frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$ है,

अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा प्राप्त हल विश्लेषणात्मक हल के अधिक सन्निकट् है।

3.3 निम्न अवकल समीकरण

$$dy/dx + e^x = 0,\ y(0) = 1$$

का हल अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा निकालिए और दर्शाइये कि अडोमेन अपघटन् विधि द्वारा प्राप्त हल विश्लेषणात्मक हल के अधिक सन्निकट है।

हल– हम जानते हैं कि दिये हुए अवकल समीकरण का विशलेषणात्मक हल

$$y = 1 - \log(1 + ex),\ x < 1,$$ है।

अडोमेन् अपघटन् विधि द्वारा उक्त अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$Ly + Ny = 0, \quad y(0) = 1$$

अथवा $$Ly = -Ny, \quad y(0)=1 \tag{3.3.1}$$

जहाँ $L=d/dx$ और $Ny = e^y$ है। अरैखिक पद $Ny = e^y$ को अंडोमेन बहुपद के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$Ny = \sum_{n-0}^{\infty} A_n$$

समीकरण (3.3.1) के दोनों पक्षों पर व्युत्क्रमित प्राचल L^{-1} का प्रयोग करने पर

$$L^{-1}Ly = -L^{-1}Ny$$

$$y = y_0 - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(e^y) \tag{3.3.2}$$

हल y को, $y = \sum_{n-0}^{\infty} A_n$ के रूप में अपघटित् करने पर पुनरावृत्ति सम्बन्ध निम्न रूप में दर्शाये जायेंगे:

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = -L^{-1}A_0$$

$$y_2 = -L^{-1}A_1$$ .... इत्यादि।

और

$$A_0 = e^{y_0}$$
$$A_1 = y_1 e^{y_0}$$
$$A_2 = (\frac{y_1^2}{2} + y_2) e^{y_0}$$
$$A_3 = (\frac{y_1^3}{\lfloor 3} + y_1 y_2 + y_3) e^{y_0}$$ ....इत्यादि।

अतः

$$y_0 = 1$$
$$y_1 = -ex$$
$$y_2 = e^2 \frac{x^2}{2}$$
$$y_3 = -e^3 \frac{x^3}{\lfloor 3}$$
.... इत्यादि।

अतः

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^n \frac{x^n}{\lfloor n}$$

जो कि निम्न रूप में भी लिखे जा सकते हैं:

$$y = 1 - \log(1 + ex), \quad x < 1,$$

अतः अडोमेन् अपघटन् विधि से प्राप्त हल विश्लेषणात्मक विधि के अधिक सन्निकट् है।

विशेष– यदि उपर्युक्त उदाहरण में e^y के स्थान पर y अथवा $x + y$ रख दें तो उदाहरण 3.1 व 3.2 उदाहरण 3.3 के विशेष उदाहरण बन जायेंगे।

4. **निष्कर्ष**– उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि अडोमेन् अपघटन् विधि एक सरल और सटीक विधि है जिसके प्रयोग द्वारा अवकल समीकरणों का हल, बिना रैखिकीकरण, विचलन, पृथक्कीकरण व सन्निकटन विधि के उपयोग के निकाल सकते हैं। इस विधा द्वारा प्राप्त परिणाम अत्याधिक सटीक और अनुप्रयुक्त विज्ञान के लिए अत्यन्त उपयोगी हैं।

संदर्भ

1. अडोमेन्, जी0(1988) ए रिव्यू ऑफ द डिकम्पोजीशन मेथड इन एप्लाइड मैथेमेटिक्स, ज0 मैथ0 एनाल0, खण्ड–135, मु0पृ0 501–544।
2. सोमाली, एस0 एवं गोकनेन, जी0(2007) अडोमेन् डिकम्पोजीशन मेथड फॉर नॉन–लीनियर स्ट्रम–लिउविल प्रॉब्लम्स सर्वेज इन मैथेमेटिक्स एण्ड इट्स एप्लीकेशन्स, खण्ड–2, मु0पृ0 11–20।
3. चेरौल्ट, वाई0(1989) कनवर्जेन्स ऑफ अडोमेन मेथड, कायपरनेट्स, खण्ड–18, अंक–2, मु0पृ0 31–38।
4. मुस्तफा, इन्स्(2005) ऑन न्यूमेरिकल सॉल्यूशन्स ऑफ वन डायमेंशनल नॉन–लीनियर बर्जर्स इक्वेशन एण्ड कंवर्जेन्स ऑफ द डिकम्पोजीशन मेथड, एप्ला0 मैथ0 कम्प्यूट0, खण्ड–170, अंक–1, मु0पृ0 76–85।
5. नहावू, जी0; मफूता, पी0 एवं मुशानयू, जे0(2016) द अडोमेन डिकम्पोजीशन मेथड फॉर न्यूमेरिकल सॉल्यूशन ऑफ द फर्स्ट ऑडर डिफ्रैंशियल इक्वेशनस्, ज0 मैथ0 कम्प्यूट0 साइंस, खण्ड–6, अंक–3, मु0पृ0 307–314।
6. दौन, जे0 एस0; रैच, आर0; बालीनू, डी0 एवं वाजवाज, ए0 एम0(2012) ए रिव्यू ऑफ द अडोमेन डिकम्पोजीशन मेथड एण्ड इट्स एप्लीकेशन्स टू फ्रैक्शनल डिफ्रैंशियल इक्वेशनस, कम्यूनि0 फ्रैक0 कैल0, खण्ड–2, अंक–3, मु0पृ0 73–99।
7. बैजर, जे0 एवं शैफियाफ, एस0 एम0(2007) ए सिम्पल ऐलगॉदिरम् फॉर कैलकुलेटिंग अडोमेन पॉलीनॉमियल्स, इन्ट0 ज0 कन्टेम्प0 मैथ0 साइंस, खण्ड–20, अंक–2, मु0पृ0 975–982।

8. बैजर, जे0 एवं पौराब्द, एम0(2006) ए मैपल प्रोग्राम फॉर कम्प्यूटिंग अडोमेन पॉलीनॉमियल्स, इण्टरनैशनल मैथेमेटिकल फोरम, खण्ड–1, अंक–39, मु0पृ0 1919–1924।
9. कुमार, एम0 एवं सिंह, एन0(2010) मॉडीफायड अडोमेन डीकम्पोजीशन मेथड एण्ड कम्प्यूटर इम्प्लीमेंटेशन फॉर सॉल्विंग सिंग्युलर बाउण्ड्री प्रॉब्लम्स अराइजिंग इन वैरियस फिजिकल प्रॉब्लम्स, कम्प्यूटर एण्ड केमिकल इंजीनियरिंग, खण्ड–11, अंक–34, मु0पृ0 1750–1760।
10. सिंह, आर0 एवं कुमार, जे0(2013) सॉल्विंग ए क्लास ऑफ सिंग्युलर टू–प्वाइंट बाउंड्री वैल्यू प्रॉब्लम्स यूजिंग न्यू मॉडीफायड डीकम्पोजीशन मेथड, हिन्दावी पब्लिशिंग कॉरपोरेशन, आई0एस0आर0एन0 कम्प्यूटेशनल मैथेमेटिक्स, खण्ड–2013, आर्टिकल आईडी–262863, पृ0 11।
11. वाजवाज, ए0 एम0(1999) ए रिलायबल मॉडीफिकेशन ऑफ अडोमेन डीकम्पोजीशन मेथड, एप्लाइड मैथेमेटिक्स एण्ड कम्प्यूटेशन, खण्ड–1, अंक–102, मु0पृ0 77–86।