कम्प्यूटर ग्राफिक्स में लीनियर अलजेबरा का प्रयोग तथा महत्व

प्रीति बाजपेई
प्रोफेसर, गणित विभाग एवं डीन, स्टूडेंट वेलफेयर
बी0आई0टी0एस पिलानी, यू0ए0ई0 परिसर, दुबई
dr.priti.bajpai@gmail.com

प्राप्त तिथि– 31.07.2016; स्वीकृत तिथि– 29.08.2016

सार– कम्प्यूटर ग्राफिक्स का प्रयोग आज खेल उद्योग, चलचित्र, क्लास रूम के लेक्चर, आर्किटेक्चर जैसे अनेक जगहों पर प्रचुर मात्रा में हो रहा है। जहाँ तक ग्राफिक्स की बात है उसका अस्तित्व लीनियर अलज़ेबरा के बगैर कुछ भी नहीं है। इस लेख में लीनियर अलज़ेबरा(रेखीय बीजगणित) किस प्रकार कम्प्यूटर ग्राफिक्स में सहयोगी सिद्ध होती है, को सरलता से समझाने का प्रयास किया गया है। कम्प्यूटर की स्क्रीन पर जो भी छवि हम देखते हैं उसे बनाने में, स्क्रीन पर लाने में और उसकी विभिन्न गतिविधियाँ अलग–अलग दिशाओं में दर्शाने के लिये लीनियर अलज़ेबरा का प्रयोग होता है। यह मैट्रसीज़ व लीनियर ट्रांसफॉरमेशन तथा कम्प्यूटर प्रोग्राम की मदद से सम्भव होता है।

बीज शब्द– कम्प्यूटर ग्राफिक्स, लीनियर अलजेब्रा, मैट्रसीज, लीनियर ट्रांसफॉरमेशन, कम्प्यूटर प्रोग्राम।

Application and importance of Linear Algebra in Computer Graphics

Priti Bajpai
Professor, Department of Mathematics
& Dean, Student Welfare, B.I.T.S. Pilani, U.A.E. Campus, Dubai
dr.priti.bajpai@gmail.com

Abstract- Today Computer Graphics is being used in many fields. Be it gaming industry, movies, architecture, in education sector for making class room teaching interesting or for making presentations for a business deal are some of them. It is interesting to know that Linear Algebra a branch of mathematics has made all this possible. In this paper we try to understand how images on the computer screen are scaled, translated and rotated using simple matrix transformations.

Key words- Computer Graphics, Linear Algebra, matrices, linear transformation, computer program.

कम्प्यूटर ग्राफिक्स में या तो वेक्टर या रैस्टर ग्राफिक्स का प्रयोग होता है। यहाँ हम वेक्टर ग्राफिक्स के विषय पर संक्षेप में चर्चा करेंगे। कोई भी छवि या तो द्वि–विमीय(2 डाईमेंशनल) या त्रि–विमीय(3 डाईमेंशनल) में बन सकती है। दोनों ही डाईमेंशन में छवि के कोनों के निर्देशांक एक मैट्रिक्स में रखे जाते हैं। उसकी वजह यह है कि कई संक्रियायें, मैट्रीसीज़ के प्रयोग से एक बार में ही हो जाती है, जो कि न ही कम्प्यूटर की स्टोरेज बचाता है बल्कि समय भी बचाता है। यहाँ हम किसी दिये आकार पर तीन प्रकार की क्रियाओं जिन्हें, स्केलिंग, ट्रांसलेशन व रोटेशन कहते हैं, को उदाहरण की सहायता से दोनों डाईमेंशन में समझाने का प्रयत्न करेंगे। अगर हम किसी ज्यामितीय आकार को लें तो उसे दर्शाने के लिये दो बातें आवश्यक हैं, कुछ बिंदु और उनके निर्देशांक व यह जानकारी कि बिंदु किस प्रकार जुड़े हैं। कितने बिंदु के निर्देशांक लेने हैं यह छवि के आकार पर निर्भर करता है। उदाहरण के तौर पर एक वर्ग लीजिये जिसके कोनों के निर्देशांक (0,0), (2,0), (2,2) व (0,2) हैं। ये निर्देशांक एक मैट्रिक्स में रखे जायेंगे और कम्प्यूटर में स्टोर होंगे। साथ में यह तथ्य कि कौन सा बिन्दु किससे जुड़ेगा, यानि प्रवाह क्या है, ये निर्देशांक मैट्रिक्स M_1 में नीचे दिये गये हैं–

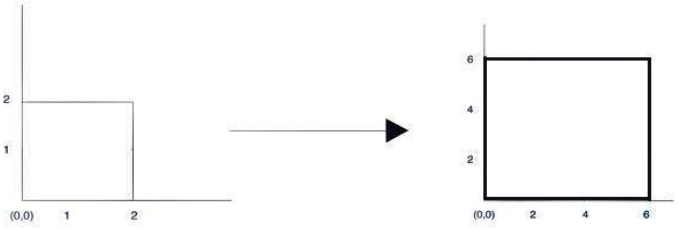
$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

अगर हम बहुभुज बनाना चाहते हैं तो उसके कोनों के निर्देशांक लेंगे। मान लीजिये हमें वर्ग के आकार को छोटा या बड़ा करना है, जिसे स्केलिंग कहा जाता है तो हम एक ट्रांसफारमेशन मैट्रिक्स

$$S_1 = \begin{bmatrix} S1 & 0 \\ 0 & S2 \end{bmatrix}$$ जहाँ S_1, S_2 चर राशि हैं को लेते हैं।

अगर $S_1 = S_2 = 3$ हैं तो

$$S_1M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$



S_1M_1 हमें स्केल करे हुये वर्ग के निर्देशांक देता है। अब वर्ग का आकार 3 गुना हो गया है। पहले चित्र में मूल वर्ग तथा दूसरे में स्केल्ड वर्ग देखा जा सकता है। यहाँ ये जानना जरूरी है कि वर्ग के कोनों को ही ट्रांसफॉर्म किया जाता है न कि कोनों को जोड़ने वाली भुजा के हर बिन्दु को। क्योंकि कोनों को आसानी से बाद में रेखा से जोड़ा जा सकता है। वैसे भी भुजा के अनगिनत बिन्दुओ के निर्देशांकों को मैट्रिक्स में रखना असम्भव है। यदि हमें वृत्ताकार छवि बनाना है तो बिंदुओं को चाप से जोड़ा जायेगा जिसके लिए कलन विधि (Algorithm) का प्रयोग होता है। आकार को छोटा करने के लिये $S_i(i=1,2)$ के मान 0 से 1 के बीच का लेते हैं। यही स्केलिंग अगर 3D में करनी है तो वो भी इसी प्रकार होती है फर्क सिर्फ यह है कि स्केलिंग तीनों अक्षों (Axis) पर होगी। इसकी ट्रांसफॉरमेशन मैट्रिक्स S_2 होगी जिसका स्वरूप यह होगा–

$$S_2 = \begin{bmatrix} S1 & 0 & 0 \\ 0 & S2 & 0 \\ 0 & 0 & S3 \end{bmatrix}$$

मान लीजिये हम आकार को दायें, बायें या ऊपर, नीचे खिसकाना चाहते हैं तो इसे ट्रांसलेशन कहते हैं जो 2D और 3D दोनों में सम्भव है। 2D में यह मैट्रिसीज के गुणा करने से बड़ी सरलता से प्राप्त हो जाता है। इस प्रकार ट्रांसफॉरमेशन मैट्रिक्स बनायी जाती है, जिसमें आखिरी संख्या 1 रहती है जिसे डमी कहा जाता है, उसका स्वरूप S_3 इस प्रकार होगा–

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

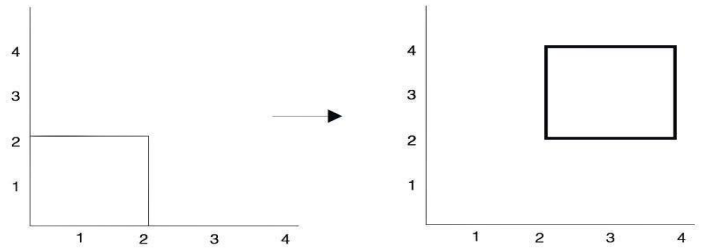
यहाँ जितना x, y एक्सिस पर खिसकाना है, उस प्रकार a ,b का मान लिया जाता है। लेकिन S_3 को M_1से गुणा करने के लिये उसका स्वरूप बदलना पड़ेगा जिसके लिये M_1 की आखिरी पंक्ति की हर संख्या 1 ली जायेगी। अगर उसे हम M_2 का नाम दे तो वह इस प्रकार होगी–

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

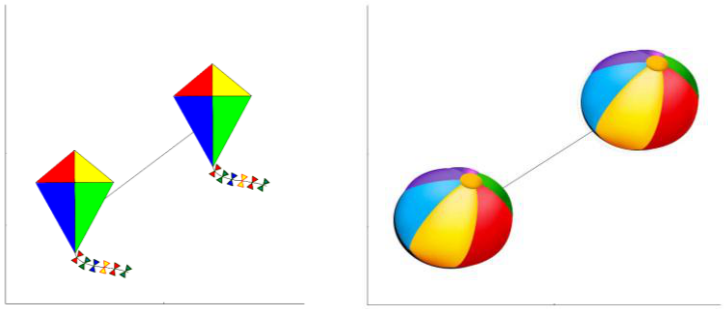
इन्हें सदृश निर्देशांक (Homogeneous Coordinates) भी कहते हैं। ऐसे ट्रांसलेशन को शियर ट्रांसलेशन भी कहते हैं। अगर हम वर्ग को 2 इकाई दायें और 2 इकाई ऊपर खिसकाना चाहते हैं तो नई जगह के निर्देशांक S_3M_2 से मिलेंगे। अगर $a = b = 2$

$$S_3M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

नये निर्देशांक (2, 2), (4, 2), (4, 4) और (2, 4) होंगे। नीचे दिया गया चित्र ट्रांसलेशन के पहले और बाद की छवि दर्शा रहा है।



कम्प्यूटर ग्राफिक्स में विभिन्न सजीव या निर्जीव वस्तुओं को स्थानान्तरित होते या अपनी जगह से दूसरी जगह जाते दिखाया जाता है मान लीजिये एक पतंग को एक जगह से दूसरी जगह उड़ाना है या एक गेंद को एक जगह से दूसरी जगह फेंकना है तो आसानी से ट्रांसलेशन से यह दर्शाया जा सकता है, क्योंकि यहाँ पतंग या गेंद का आकार नहीं बदलता। नीचे दिये गये चित्रों से यह स्पष्ट है–



3D में भी ट्रांसलेशन इसी प्रकार होता है। यहाँ ट्रांसलेशन मैट्रिक्स

$$S_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ होगी।

अब अगर किसी आकार को घुमाना है तो उसे रोटेशन कहते हैं। 2D में रोटेशन मैट्रिक्स S_5 होगी–

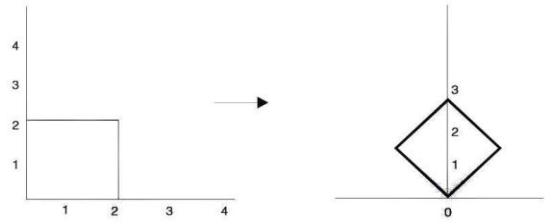
$$S_5=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -sin\varphi & 0\\ sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

अगर हमें आकार को 45° घड़ी की विपरीत दिशा में घुमाना है तो

$$S_5=\begin{bmatrix}0.7 & -0.7 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ होगी और नये निर्देशांक होंगे–

$$S_5M_2=\begin{bmatrix}0.7 & -0.7 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1.4 & 0 & -1.4\\ 0 & 1.4 & 2.8 & 1.4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

नीचे दिये गये चित्र में यह दिखलाया गया है–

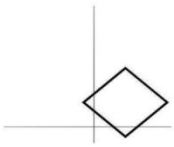


अगर वर्ग के केन्द्र(0.5, 0.5) पर दिए आकार को घुमाना है तो वर्ग के केन्द्र को(0, 0) पर लाना होगा फिर रोटेशन करके वापस ट्रांसलेशन करना होगा। यह इस प्रकार होगा–

$$(S_6^{-1}S_5S_6)\ M_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & -0.7 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.5\\ 0 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}0.5 & 1.9 & 0.5 & -0.9\\ -0.2 & 1.2 & 2.6 & 1.2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

(0.5,-0.2), (1.9,1.2), (0.5, 2.6),(-0.9,1.2) नये निर्देशांक होंगे। वर्ग का नया आकार चित्र में प्रदर्शित है।



3D में रोटेशन तीनों अक्षों पर हो सकता है तो मैट्रिक्स ऑफ रोटेशन तीन होंगी–

$$S_7(X) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\rightarrow \quad \text{x- अक्ष पर}$$

$$S_8(Y) = \begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}\rightarrow \quad \text{y- अक्ष पर}$$

$$S_9(Z) = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow \quad \text{z- अक्ष पर}$$

यहाँ ये जानना आवश्यक है कि बहुधा कॉमपोज़िट ट्रांसफॉरमेशन यानि ऊपर दिये ट्रांसफॉरमेशन को साथ में काम में लाया जाता है। आज वीडियो गेम्स हों या चलचित्र सभी में कम्प्यूटर ग्राफिक्स के प्रयोग से, दृश्य ही नही अपितु मानवीय आकृतियों को भी सजीव और वास्तविक दिखाया जा रहा है। विज्ञान के क्षेत्र में भी ये प्रयोग में लाया जा रहा है जैसे– बायोलॉजी में मॉलिक्यूलर मॉडलिंग आदि। विज्ञापनों के बनाने में भी यह बहुत सहायक है।

आभार– लेखिका भाविका व अरघासेन, सिद्धार्थ लाहोटी, अखिलेश तथा श्री टी0 एन0 मिश्र के सहयोग के लिये अत्यन्त आभारी है।

संदर्भ

1. डेविडसी, ले0(2003) लीनियर अलज़ेबरा एण्ड इट्स एप्लिकेशन्स, बोस्टन एडिसन वैसले।
2. www.math.washington.edu/nking/coursedir/m308901/prefects/m308901-pdf/zip.pdf
3. www.cs.brown.edu/courses/cs123/lectures/viewing3.pdf