खण्ड –4, अंक – 1, वर्ष – 2016, मु0पृ0 30–34, D.O.I. : 10.22445/avsp.v4i1.4373

दुर्बल निर्देशित सन्निकटन के अन्तर्गत त्रिफलक अनुप्रस्थ काट की धात्विक परत वाली ऑप्टिकल तरंग वर्तिका के मॉडल कट ऑफ गुणों का विश्लेषण

अलका शर्मा
असिस्टेंट प्रोफेसर, भौतिक विज्ञान विभाग
श्री जे0 एन0 पी0 जी0 कॉलेज, लखनऊ–226001, उ0प्र0, भारत
alkasharma.bhu@gmail.com

प्राप्त तिथि– 30.07.2016; स्वीकृत तिथि– 30.08.2016

सार– प्रस्तुत शोध पत्र में एक विशेष अनुप्रस्थ काट की कोर संरचना वाली तरंगवर्तिका से विद्युत चुम्बकीय तरंगों के संचरण पर प्रकाश डाला गया है। इस विशेष तरंगवर्तिका में तीन कोर है जो एक कॉमन धात्विक सीमा रेखा के अन्तर्गत है। उचित निर्देशांक प्रणाली का प्रयोग करते हुये अदिश तरंग समीकरण हल करके अभिलाक्षणिक समीकरण निर्देशित मोड के लिये ज्ञात की गई है। इसके लिये दुर्बल निर्देशित सन्निकटन के अन्तर्गत विश्लेषणात्मक विधि का प्रयोग किया गया है। उपरोक्त तरंगवर्तिका के मौलिक मॉडल गुणों को सरल तरीके से समझने के लिये कट ऑफ समीकरण को प्राप्त कर निम्न श्रेणी के मोड के मॉडल कट आफ मानों को संख्यात्मक रूप से ज्ञात किया गया है। इसके अतिरिक्त लेखक ने प्रस्तुत तरंगवर्तिका का तुलनात्मक अध्ययन वृत्तीय कोर की तरंगवर्तिका तथा परावैद्युत क्लैडिंग की तरंगवर्तिका से किया गया है।

बीज शब्द– त्रिफलक अनुप्रस्थ काट, मॉडल कट ऑफ कंडीशन, विश्लेषणात्मक विधि, ऑप्टिकल फाइबर।

Modal cut off properties of a metal coated optical waveguide with trefoil cross-section under weak guidance approximation

Alka Sharma
Assistant Professor, Department of Physics
Sri J.N.P.G. College Lucknow-226001, U.P., India
alkasharma.bhu@gmail.com

Abstract

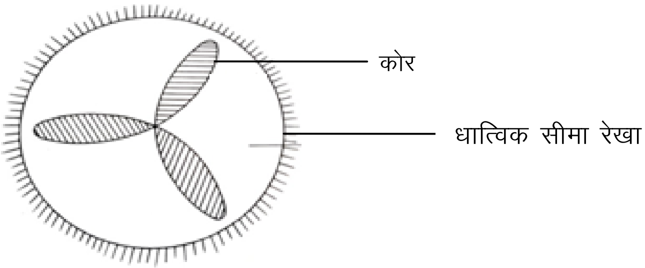
In the present paper the author investigated the propagation of electromagnetic wave through the special cross-sectional waveguide whose guiding region consist three cores embedded in common metallic boundary. By choosing an appropriate coordinate system, the scalar wave equation is solved, and thereby characteristic equation for the guided modes under the weak guidance approximation is derived using analytical method. To understand the basic modal properties in a simple manner, the cutoff equation is derived, and the modal cutoff properties of some lower order modes are determined numerically. The author also gave a comparative study of metallic boundary instead of dielectric cladding boundary on the modal cutoff behavior of waveguide.

Key words- Trefoil cross-section, modal cutoff condition, analytical method, Optical fiber.

परिचय– पिछले कुछ दशकों से विश्व में लम्बी दूरी के नेटवर्क में ऑप्टिकल फाइबर के प्रयोग ने शोधार्थियों, वैज्ञानिकों एवं दूर संचार कंपनियों का ध्यान अपनी ओर आकर्षित किया है। आरंभ में केवल वृत्तीय कोर[1-2] तथा तलीय कोर[3-4] की तरंग वर्तिका का प्रयोग किया जाता था। परन्तु कुछ समय से विभिन्न अनुप्रस्थ काट की कोर संरचना की तंरग वर्तिका पर बहुत से अन्वेषकों ने अध्ययन किया है।[5–9] सामान्यतः दो अनवृत्तीय अनुप्रस्थ काट की कोर जिनमें आयताकार तथा दीर्घवृत्ताकार प्रमुख हैं, अध्ययन किया गया है। दीर्घवृत्ताकार कोर संरचना की तरंगवर्तिका को मानक वृत्तीय अनुप्रस्थ काट के फाइबर में विरूपण के रूप में देखा गया है। आजकल धात्विक क्लैडिंग ऑप्टिकल तरंगवर्तिका को कुशल ऑप्टिक ध्रुवक[10-11] के रूप में प्रयोग में लाया जाता है। धात्विक कवर ऑप्टिकल डिवाइस को कनेक्शन में सुविधा प्रदान करता है। यद्यपि धात्विक क्लैडिंग की तरंगवर्तिका लम्बी दूरी के संचार के लिये उपयुक्त नहीं है परन्तु इसकी उपयोगिता

एकीकृत आप्टिकल डिवाइस[12] में अधिक है। प्रस्तुत शोधपत्र में लेखक ने एक विशेष प्रकार के अनुप्रस्थ काट की तरंगवर्तिका का अध्ययन किया है जिसकी अनुप्रस्थ काट त्रिफलक प्रकार की है। इसकी तुलना तीन कोर जो एक ही धात्विक सीमारेखा के अन्तर्गत है, की आप्टिकल तरंगवर्तिका से कर सकते है। इस तरंगवर्तिका का विश्लेषण दुर्बल निर्देशित सन्निकटन विधि के अन्तर्गत किया गया है। तरंगवर्तिका द्वारा संचारित संभावित मोडों का संख्यात्मक मान कट ऑफ समीकरण के द्वारा निकाला गया है। जहाँ तक संभव है कुछ भौतिक अनुमानों का प्रयोग कर अध्ययन को विश्लेषणात्मक रखा गया है।

सिद्धान्त–उपरोक्त वर्णित तरंगवर्तिका की अनुप्रस्थ काट को **चित्र–1** द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



इस तरंगवर्तिका में तीन केन्द्रीय भाग अर्थात तीन कोर है जो एक ही धात्विक सीमा रेखा के अन्दर है। इस तरंगवर्तिका का समीकरण इस प्रकार है।

$$r^3 = \xi^3 \sin 3\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

अभिलम्ब समीकरण

$$r^3 = \eta^3 \cos 3\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

चित्र–2 में त्रिफलक संरचना तथा इसके अभिलम्ब को प्रदर्शित किया है।

समय का आवृत्त परिवर्तन मानते हुये विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ की तरंग समीकरण इस प्रकार है

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\vec{E} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

जहाँ ω कोणीय वेग, n कोर क्षेत्र के परावैद्युत का अपर्वतनांक है। दुर्बल निर्देशित सन्निकटन का प्रयोग कर समीकरण (3) का अदिश रूप इस प्रकार है।

$$\nabla^2\psi + \omega^2 \mu_0 \in \psi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

यहाँ ψ विद्युत/चुम्बकीय क्षेत्र का अदिश रूप है। इस प्रकार की तरंगवर्तिका के विश्लेषण के लिये बेलनाकार ध्रुवीय निर्देशांक का प्रयोग न करके सरलता के लिये नये निर्देशांको (ξ, η, z) का प्रयोग स्केल गुणन की सहायता से करते है। नये निर्देशांकों में समीकरण (4) इस प्रकार है।

$$\frac{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}{\eta^4\xi^4}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{\xi^4}{\eta^4}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right\}+\frac{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}{\eta^4\xi^4}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{\eta^4}{\xi^4}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right\} + \frac{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}{\eta^4\xi^4}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\xi^4\eta^4}{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\} + \omega^2\mu_0 \in \psi = 0 \ldots\ldots \quad (5)$$

इस समीकरण को हम चर राशियों को पृथक करने की विधि से हल करते हैं।

$$\varphi(\xi,\eta,z) = F_1(\xi)F_2(\eta)e^{i\beta z} \ldots\ldots (6)$$

यहाँ β संचरण वेक्टर का z अवयव है। समीकरण (6) को समीकरण (5) में प्रयोग करने पर नई समीकरण इस प्रकार प्राप्त होती है।

$$\frac{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}{\eta^8}\left[\frac{4}{\xi}\frac{1}{F_1}\frac{dF_1}{d\xi}+\frac{1}{F_1}\frac{d^2F_1}{d\xi^2}\right]+\frac{(\xi^6+\eta^6)^{4/3}}{\xi^8}\left[\frac{4}{\eta}\frac{1}{F_2}\frac{dF_2}{d\eta}+\frac{1}{F_2}\frac{d^2F_2}{d\eta^2}\right]+\omega^2\mu_0 \in -\beta^2 = 0 \ldots\ldots (7)$$

यहाँ स्पष्ट है कि चर राशियों को पृथक करने की तकनीक से भी चर राशि ξ एव η पृथक नहीं हो पाती हैं। अतः हम दो विशेष स्थिति लेते हैं–

(i) $\xi \gg \eta$
(ii) $\eta \gg \xi$

प्रथम स्थिति में समीकरण (7) दो समीकरणों में विभाजित हो जाती है।

$$\frac{d^2F_1}{d\xi^2}+\frac{4}{\xi}\frac{dF_1}{d\xi}+\frac{mF_1}{\xi^8}=0 \ldots\ldots (8)$$

$$\frac{d^2F_2}{d\eta^2}+\frac{4}{\eta}\frac{dF_2}{d\eta}+\left(\omega^2\mu_0 \in -\beta^2-\frac{m}{\eta^8}\right)F_2=0 \ldots\ldots (9)$$

जहाँ m एक अज्ञात नियतांक है। इसी प्रकार द्वितीय स्थिति में भी हमें दो समीकरण मिलती है।

$$\frac{d^2F_1}{d\xi^2}+\frac{4}{\xi}\frac{dF_1}{d\xi}+\left(\omega^2\mu_0 \in -\beta^2+\frac{\alpha}{\xi^8}\right)F_1=0 \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{d^2F_2}{d\eta^2}+\frac{4}{\eta}\frac{dF_2}{d\eta}-\frac{\alpha}{\eta^8}F_2=0 \ldots\ldots (11)$$

जहाँ α एक नया अज्ञात नियतांक है। जब $\alpha = 0, m = 0$ (निम्नतम कोटि के मोड के लिये) समीकरण (9) एंव (10) एक ही समीकरण का रूप हो जाती है।

$$\frac{d^2F_1}{d\xi^2}+\frac{4}{\xi}\frac{dF_1}{d\xi}+(\omega^2\mu_0 \in -\beta^2)F_1=0 \ldots\ldots (12)$$

शेष समीकरण (8) एवं (11) में μ तथा $\in$ नही है इसीलिये इन समीकरणों से कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है। समीकरण (12) प्रयुक्त तरंगवर्तिका के सम्पूर्ण तरंग पथ का वर्णन करती है। जिसकी शर्त $\xi \gg \eta$ है। फ्रोबीनियस विधि से समीकरण (12) हल करने पर हमें दो सरल स्वतन्त्र श्रेणी हल प्राप्त होते हैं।

$$F_{11} = 3C_0 \left[\frac{1}{3} - \frac{\delta \quad \xi^2}{2.3.5} + \frac{\delta^2 \quad \xi^4}{2.3.4.5.7} - \frac{\delta^3 \quad \xi^6}{9.7.6.5.4.3.2} + \cdots\right] \ldots\ldots(13)$$

$$F_{12} = C_0 \xi^{-3}\left[1 + \frac{\delta}{2}\ \xi^2 - \frac{\delta^2}{2.4}\xi^4 + \frac{\delta^3\xi^6}{6.4.3.2} - \cdots\right] \ldots\ldots(14)$$

जहाँ $\delta = \omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2$ है। इन श्रेणी हलों का विश्लेषण करने पर ज्ञात होता है कि $\xi \rightarrow 0, F_{12}$ हल अनन्त की ओर अग्रसर होता है। अतः समीकरण (13) ही कोर क्षेत्र के लिये मान्य हल है। समीकरण (13) को एक सूत्र के रूप में लिखा जा सकता है।

$$F_{11\,(\xi)} = 3C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left\{\left(\sqrt{\delta}\,\xi\right)^2\right\}^n}{2^n\, n! \prod_{l=0}^{n} (2l+3)}$$

अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात करने के लिये अब सीमा प्रतिबन्धों को लगाते हैं। जिसके अनुसार क्षेत्र φ निर्देशित पथ की सीमा रेखा पर शून्य होना चाहिये।

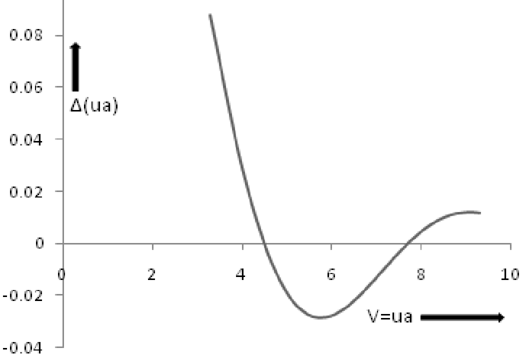
$$(F_{11})_{\xi=a} = 0 \ldots\ldots(15)$$

F_{11} को ua के रूप में लिखने पर

$$\Delta\,(ua) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left\{\left(\sqrt{u}\ a\right)^2\right\}^n}{2^n\, n! \prod_{l=0}^{n} (2l+3)} = 0 \ldots\ldots(16)$$

जहाँ $u = \omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2$ हैं। समीकरण (16) उपरोक्त अनुप्रस्थ काट की तरंगवर्तिका के लिये दुर्बल निर्देशित सन्निकटन के अन्तर्गत तंरग वर्तिका द्वारा संचरित मोड की व्याख्या करती है।

संख्यात्मक परिणाम– समीकरण (16) के द्वारा धात्विक सीमा रेखा के त्रिफलक अनुप्रस्थ काट के फाइबर में संचरित मोड के गुणों का संख्यात्मक अनुमान लगा सकते है। प्रस्तुत शोध पत्र में मोड के कट ऑफ मान पर तथा इसके विश्लेषण पर ध्यान केन्द्रित किया गया है। इसके लिये कोर के परावैद्युत का अपवर्तनांक 1.48 तथा संचरित तरंग का तरंग दैर्ध्य $\lambda = 1.55\mu$ लेते है। मॉडल कट ऑफ मानों को ज्ञात करने के लिये समीकरण (16) का बायां भाग $\Delta\,(ua)$ तथा β के विभिन्न मानों के बीच वक्र खींचते हैं। β के ये मान n_1k तथा n_2k के बीच नियमित अन्तराल पर लेते हैं। परिणामी वक्र **चित्र–3** द्वारा दिखाया गया है।



यह वक्र अक्ष को जिन बिन्दुओं पर काटता है वे बिन्दु कटआफ मान देते हैं। इस विधि से कटआफ मानों को शून्य कोटि मोड $\alpha = 0$ के लिये निकाला जाता है। उच्च कोटि मोड के लिये नई कटआफ समीकरण $\alpha \neq 0$ ज्ञात करना आवश्यक है।

चर्चा एवं निष्कर्ष– **चित्र–3** में $\Delta\,(ua)$ तथा $V\,(u)$ के बीच वक्र खींचा गया है। विभिन्न मोड के कट ऑफ V मान $V \approx 4.511$, $V \approx 7.648$ प्राप्त होतें हैं। वक्र से यह ज्ञात होता है कि $V < 10$ के लिये उपरोक्त काट के कोर की तरंगवर्तिका केवल दो मोड को ही संचारित करती हैं यहाँ **V** नार्मलाइज आवृत्ति है। यदि हम मानक वृत्तीय अनुप्रस्थ काट के फाइबर से प्रस्तुत तरंगवर्तिका की तुलना करते हैं तो आश्चर्यजनक परिणाम प्राप्त होता है कि प्रस्तुत तरंगवर्तिका $V < 4.511$ पर एक भी मोड संचरित नहीं करती, जबकि वृत्तीय कोर फाइबर में $V = 0$ पर भी मोड संचारित होता है। इसका कारण संभवतः वृत्तीय कोर फाइबर का केन्द्र अनुप्रस्थ काट के केन्द्र पर होना है जबकि प्रस्तुत शोध पत्र में तरंगवर्तिका का केन्द्र सीमा रेखा पर है एवं यह एक विलक्षण बिन्दु है। यदि चालक सीमा रेखा की त्रिफलक अनुप्रस्थ काट का तुलनात्मक अध्ययन परावैद्युत कोर एवं परावैद्युत क्लैडिंग[12] से करते है तब देखते है कि धात्विक सीमा रेखा के लिये कट ऑफ का मान के उच्च मान की ओर अग्रसर होता है। परावैद्युत क्लैडिंग में जहाँ हमे पर तीन मोड प्राप्त होते हैं वहीं प्रस्तुत तंरग वर्तिका में केवल दो ही मोड प्राप्त होते हैं। अतः हम इस निष्कर्ष पर पंहुचते हैं कि परावैद्युत क्लैडिंग तरंगवर्तिका के स्थान पर धात्विक सीमारेखा की तरंगवर्तिका लेने पर संचरित मोड की संख्या कम हो जाती है।

सन्दर्भ

1. घटक, ए0 के0; टिहंग, टी0 टी0 एवं शर्मा, ई0(1985) ज0 ऑप्ट0 कम्यूनिकेशन, खण्ड–6, मु0पृ0 147।
2. शर्मा, ई0; शर्मा, ए0 एवं गोयल, ई0 सी0(1982), आई0ईईई जे क्वांटम इलेक्ट्रॉन, क्यूई, खण्ड–18, मु0पृ0 1484।
3. यूगंर, एच0 जी0(1997) प्लेनर ऑप्टिकल वेवगाइड एंड फाइबर्स, क्लेरेन्डन प्रेस।
4. चौधरी, पी0 के0; खस्तगीर, पी0; ओझा, एस0 पी0 एवं सिंह, एल0 के0(1992) वीक गाइडेंस इन बेन्ट एंड अनबेन्ट फोर–लेयर प्लेनर वेवगाइड इन ए कम्पेरैटिव स्टडी ऑफ डिसपर्सन कर्वस, जापान ज0 अप्लाइड फिजिक्स, खण्ड–31, मु0पृ0 39–41।
5. डयोट, आर0बी0(1990) कट ऑफ आफ द फर्स्ट हाईपर आर्डर मोड्स इन इलिप्टिकल द डाइइलैक्ट्रिक वेव गाइड: एन एक्सपेरिमेंटल अप्रोच, इलेक्ट्रॉन लैटर्स, खण्ड–26, मु0पृ0 1721–1723।
6. मिश्रा, बी0; चौधरी, पी0 के0; खस्तगीर, पी0 एवं ओझा, एस0पी0(1995) मॉडल प्रोपेगेशन एनालिसिस आफ ए वेवगाइड विद ए रेगुलर पेन्टागोनल क्रास सेक्शन विद कन्डक्टिंग एंड नान कन्डक्टिंग बाउड्रींज, माइक्रोवेव0 ऑप्ट0 टेक्नो लैटर्स, खण्ड–8, मु0पृ0 280–282।
7. शर्मा, ए0(2011) माडल डिसपर्शन कर्वस आफ एन आप्टिकल वेवगाइड विद ए कोर क्रास सेक्शन पारशियली बाउंडेड बाय वन टर्न ऑफ एन इक्वीएनगुलर स्पाइरल अंडर वीक गाइडेंस एप्रोक्सीमेशन, ऑप्टिक, खण्ड–122, मु0पृ0 1535–1537।
8. मिश्रा, ए0 के0; पांडे, पी0सी0; कुमार, डी0; सिंह द्वितीय, ओ0 एन0(2013) एन एनालिटिकल स्टडी ऑफ मॉडल डिसपर्सन केरेक्टरस्टिक ऑफ हेलकली क्लैड क्रिस्टल कोर ऑप्टिकल फाइबर, ऑप्टिक इंटरनेशनल जर्नल ऑफ लाइट एंड इलेक्ट्रॉन ऑप्टिकल, खण्ड–124, अंक–17, मु0पृ0 2611–2667।
9. सिंह, बी0; प्रसाद, बी0 एवं ओझा, एस0 पी0(2000) वीक गाइडेंस मॉडल एनालिसिस एंड डिसपर्शन कर्वस आफ एन इनफ्रारेड लाइटगाइड हैविग ए क्रास सेक्शन विद ए न्यू टाइप आफ एस्मिमेट्रिक लूप बाउड्री, ऑप्ट0 फाइबर, टेक्नो0, खण्ड–6, मु0पृ0 290–298।
10. कमीनाउ, आई0 पी0; मेमल, डब्लू0 एल0 एवं बेवर एच0 पी0(1974) मेटल क्लैड ऑप्टिकल वेवगाइड, एनालिसिस एंड एक्सपेरिमेंटल स्टडी, एप्ल0 ऑप्ट, खण्ड–12, मु0पृ0 396–399।
11. पोल्की, जे0 एन0; मिशेल, जी0 एल0(1974) मेटल–क्लैड प्लेनर डाइइलेक्ट्रिकल वेवगाइड फार इन्टीग्रेटिड ऑप्टिक्स, ज0 ऑप्ट0 सो0 अमेरिका, खण्ड–64, मु0पृ0 274–277।
12. शर्मा, ए0(2000) मॉडल डिपर्शन कर्वस आफ ए मेटल कोटेड ऑप्टिकल वेवगाइड विद ए गाइडिंग रीजन क्रास सेक्शन बाउंडेड बाय इक्वीएनगुलर स्पाइरलर्स , ऑप्टिक, खण्ड–111, अंक–9, मु0पृ0 381–384।