द्विघातीय समीकरण – प्राचीन व समकालीन प्रणाली का विश्लेषण

प्रीति बाजपेई
डीन, स्टूडेंट वेलफेयर
बी0 आई0 टी0 पिलानी परिसर, दुबई, यू0 ए0 ई0
dr.priti.bajpai@gmail.com

प्राचीन भारत में द्विघातीय समीकरण सर्वप्रथम वेदों के निर्माण में उपयोग की गई। सुलभसूत्र जिसमें वेदों के निर्माण की विस्तृत जानकारी दी गई है, इस तथ्य को प्रमाणित करता है। इतिहास हमको बताता है कि विभिन्न प्रकार की वेदी अलग–अलग उद्‌देश्य से बनाई जाती थी। उनके आकार विभिन्न धार्मिक विचारों के आधार पर होते थे। इन्हीं आकारों के अलग–अलग माप के बनाने के लिए सम्भवतः गणित व समीकरणों की उत्पत्ति हुई। इसके पश्चात् जब गणितज्ञों की रूचि व जिज्ञासा नक्षत्र विद्या की तरफ बढ़ी तब भी समीकरणों को हल किया गया।

बौध्यायन सुलभ सूत्र में द्विघातीय समीकरण का सरलतम रूप $ax^2 = c$ देखने को मिलता है। तद्‌उपरांत $ax^2 + bx = c$ को बहुत से गणितज्ञों नें जैसे महावीर(850 बी0सी0), आर्यभट्ट(476 बी0सी0), ब्रहमगुप्त(598–668 ऐ0 डी0), श्री धराचार्य(870–930 ऐ0 डी0), श्रीपति(1019–1060 ऐ0 डी0) ने अपने–अपने तरीकों से हल किया। आश्चर्य की बात यह है कि जो विधि उस काल में भारतीय गणितज्ञों ने प्रयोग की, वह आज प्रयोग में आने वाली विधियों से बहुत भिन्न नहीं है। आज के युग में कम्प्यूटर व कैलकुलेटर का प्रयोग समीकरणों को हल करने में होता है। यह तो विदित है कि समीकरणों का हल बड़ी सरलता से हो जाता है, पर उसमें त्रुटियां रह जाती हैं। इनसे कम्प्यूटर व कैलकुलेटर की बनावट के कारण बचा नहीं जा सकता। वैसे तो बहुत सी विधियां आज प्रयोग में हैं जैसे बाइसेक्शन, न्यूटन और रेग्यूला फालसी, पर इन विधियों में श्रेष्ठ न्यूटन की विधि है। क्योंकि इस विधि से समीकरण का हल शीघ्र निकलता है। न्यूटन की विधि में पुनरावृत्ति कम होती है।

यह लेख द्विघातीय समीकरणों को हल करने की प्राचीन व समकालीन विधियों के तुलनात्मक अध्ययन का प्रयास है। यहाँ कुछ एक महत्वपूर्ण गणितज्ञों की विधियों को देखते हैं।

आर्यभट्ट ने समीकरण $ax^2 + bx - cb = 0$ का हल इस प्रकार दिया–

आर्यभट्ट ने $ax^2 + bx = c$ को हल कर x का मूल प्रदान किया

$$x = \frac{\left(\sqrt{abc + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right)}{a}$$

यहाँ 'x' अज्ञात राशि है, तथा a, b,c गुणांक हैं।

ब्रहमगुप्त ने दो विधियां दी हैं। उनके द्वारा पहली विधि में x का मूल प्रदान किया

$$x = \frac{\left\{\sqrt{4ac + b^2} - b\right\}}{2a}$$

तथा दूसरी विधि में x का मूल प्रदान किया गया

$$x = \frac{\left\{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right\}}{a}$$

अनुसंधान(विज्ञान शोध पत्रिका) खण्ड 1, अंक 1, अक्टूबर 2013 (आई.एस.एस.एन. : 2322-0708)

ब्रह्मगुप्त की विधि में गुणक का चिन्ह $\pm$ दोनों हो सकता था। यह विदित है कि श्रीधराचार्य ने द्विघातीय समीकरण $ax^2+bx = c$ को हल करने का सामान्य सूत्र दिया। 'x' का मान निकालने के लिए उन्होंने पहले समीकरण $ax^2 +bx = c$ को 4a से गुणा किया फिर दोनों ओर b^2 को जोड़ा तद्उपरांत बायें हाथ के व्यंजक को पूर्ण वर्ग बनाया। उसके बाद बायें हाथ के व्यंजक का वर्गमूल लेकर

$$2ax+b=\sqrt{4ac+b^2}$$

प्राप्त हुआ। इससे उन्हें 'x' का मूल

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

प्राप्त हुआ। आज जो विधि हम इस्तेमाल करते हैं उसमें 'x' का मूल

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

निकलता है। यदि इन दोनों हलों की आपस में तुलना की जाये तो पहला अंतर यह है कि श्रीधराचार्य जी की विधि में 'x' का सिर्फ एक मूल निकलता है। उसका अंतर विविक्तकर(discriminant) का है। परन्तु विविक्तकर का $(4ac+b^2)^{1/2}$ का कारण समीकरण $ax^2+bx=c$ है न की $ax^2+bx+c=0$

श्रीपति जी की भी दो विधियां हैं। पहली विधि श्रीधराचार्य जी की विधि की ही तरह है। दूसरी विधि में $ax^2+bx = c$ के दोनों ओर 'a' से गुणा करते हैं तद्उपरांत $(b/2)^2$ को समीकरण में दोनों ओर जोड़ते हैं, फिर बायें हाथ को पूर्ण वर्ग बनाकर

$$\left(ax+\frac{b^2}{2}\right)=ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

प्राप्त होता है और इससे 'x' मान निकलता है

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{2}$$

भास्कराचार्य ने भी द्विघातीय समीकरणों को हल करने की चक्रवाती विधि दी। एक से अधिक अज्ञात राशि की द्विघातीय समीकरण का हल निकालने का श्रेय उन्हें ही जाता है।

आज पूरे विश्व का ध्यान प्राचीन भारतीय गणित की तरफ है। यह रूझान उन विधियों की सरलता की वजह से है। यह सर्वविदित है कि प्राचीन भारतीय प्राचीन विधियों से मन में गणना कर हल निकाला जा सकता है। आज मनुष्य कम्प्यूटर व कैलकुलेटर पर कुछ इस प्रकार निर्भर है कि उनके अभाव में हल निकालना कठिन लगता है। यही नहीं हल भी पूरी तरह से सही नहीं निकलता है क्योंकि कम्प्यूटर फ्लोटिंग पॉइंट अर्थमेटिक इस्तेमाल करते हैं।

संक्षेप में यह कहा जा सकता है कि प्राचीन गणितज्ञों द्वारा दिखाई गई विधियों को अगर आगे बढाया जाये तो कई जटिल समीकरणों के आसान हल और सर्वप्रथम समाधान निकाले जा सकते हैं। गणित में इस सरलता के आने से

संभवतः युवा विद्यार्थी गणित की तरफ आकर्षित हों जो हमारे देश के लिए बहुत लाभदायक होगा। यह इसलिए भी आवश्यक हो गया है क्योंकि युवकों का रूझान गणित की तरफ धीरे–धीरे कम होता जा रहा है।

संदर्भ

1. दत्ता, बी0 बी0 तथा सिंह, ए0 एन0(2004) हिस्ट्री ऑफ हिन्दू मैथमेटिक्स, भारतीय कला प्रकाशन, दिल्ली, भारत, खण्ड 1 व 2, संस्करण 2004।
2. शुक्ला, के0 एस0 तथा वर्मा, के0 वी0(1976) आर्यभटीय ऑफ आर्यभट्ट, ट्रांस0, नई दिल्ली, मु0 पृ0 38–45।
3. शुक्ला, के0 एस0, हिन्दू मैथमेटिक्स इन द सेवेंथ सेंचुरी एज फाउंड इन भास्कर प्रथम कौमेंट्री ऑन आर्यभटीय गणित, खण्ड 22(1971), पृ0 1, 115–130, 2, 61–78 और खण्ड 23(1972), पृ0 1, 57–79 और 2, 41–50।
4. हीफर, अल्ब्रेक्ट(1972) द रिसेप्शन ऑफ ऐंशियेंट इंडियन मैथमेटिक्स बाय वेस्टर्न हिस्टोरियन्स, पी एच0 डी0 डिजर्टेशन।