

Some Problems on Diophantine Equations from Sridharacarya's Patiganita

Priti Bajpai  
BITS Pilani, Dubai Campus, UAE  
dr.priti.bajpai@gmail.com

Received: 04-08-2023, Accepted: 04-11-2023

**Abstract-** In this research paper four problems from Sridharacarya's Patiganita have been solved by forming Diophantine Equation. The method used by Sridharacarya has been also compared to the techniques being used presently.

**Key words-** Diophantine Equations, Technique, Solution

श्रीधराचार्य की पाटीगणित व डायोफैंटाइन समीकरण

प्रीति बाजपेई  
बिट्स पिलानी, दुबई कैम्पस, दुबई  
dr.priti.bajpai@gmail.com

**सार—** इस शोधपत्र में श्रीधराचार्य की पाटीगणित के चार उदाहरणों को डायोफैंटाइन समीकरण बनाकर हल किया गया है। पाटीगणित में दिये गये हल को आज की पद्धति से तुलना कर निष्कर्ष भी निकाला गया है।

**बीज शब्द—** डायोफैंटाइन समीकरण, पद्धति, हल

1. **परिचय—** श्रीधराचार्य की पाटीगणित अंकगणित और माप से सम्बन्ध रखती है। यह मूलतः छात्रों और व्यापारियों के लाभ के उद्देश्य से लिखी गयी थी। इसके दो मुख्य भाग हैं। परिकर्मा (Logistics) और व्यवहार (Determination)। श्रीधराचार्य ने 29 परिकर्मा, जिसमें संकलित (जोड़ना), व्यवकलित (घटाना), प्रत्युत्पन्न (गुणा), भाग, वर्गमूल, इत्यादि हैं, का प्रयोग किया है। आज हम उन्हें संक्रियाएं कहते हैं। पाटीगणित में 9 व्यवहार हैं, जिसमें मिश्रक (Mixture), श्रेणी (Series), क्षेत्र (Plane figures) तथा शून्य तत्व (Mathematics of zero) इत्यादि हैं। श्रीधराचार्य ने उन्हीं व्यवहारों का वर्णन किया है जो उस समय दैनिक जीवन में काम आते थे।

उदाहरण-1

द्वौः त्रयःपंचचत्वारः प्रस्थाबीजस्य तत्फलम्।  
शतद्वयदशोपेतं तत्र किस्यात्पृथक् पृथक्।। (मिश्रक व्यवहारसूत्र-71, पृष्ठ-73)

अर्थात्, चार साझेदारों द्वारा क्रमशः दो, तीन, पाँच तथा चार प्रस्थ बीजों के योगदान से कुल 210 अनाज का उत्पादन हुआ, प्रत्येक साझेदार को अलग-अलग कितने प्रस्थ बीज मिलेंगे? (प्रस्थ भार की एक इकाई, जो उस समय प्रचलन में थी और 640 ग्राम के समतुल्य थी।)

श्रीधराचार्या का हल— श्रीधराचार्य के अनुसार सबका अलग-अलग हिस्सा निकालने के लिये बीजों के हिस्सों को सबके जोड़ से भाग देकर फिर हर एक को फल से गुणा करने पर हल निकलता है।

$$\text{बीजों के हिस्सों का जोड़} = 2 + 3 + 5 + 4 = 14$$

$$\text{हर एक का हिस्सा} = (2/14) \times 210, (3/14) \times 210, (5/14) \times 210 \text{ और } (4/14) \times 210$$

यानि 30, 45, 75 और 60 प्रस्थ

डायोफैंटाइन समीकरण बना कर हल—डायोफैंटाइन समीकरण बना कर हल करने पर हमें एक व्यापक हल मिलता है, जिससे

## शोध पत्र

सब हल जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं, मिल जाते हैं।

माना  $x, y, z$  और  $u$  क्रमशः चारों का हिस्सा है, तो

$$2x + 3y + 5z + 4u = 210$$

जिसका व्यापक हल है

$$x = 210 + t$$

$$y = -210 - 2t + t'$$

$$z = 420 + 4t - 3t' + 4t''$$

$$u = -420 - 4t + 3t' + 5t''$$

जहाँ  $t, t', t'' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

यहाँ  $x, y, z$  और  $u$  सदैव  $> 0$  होंगे।

(i) यदि  $t = -209, t' = -207$  और  $t'' = -51$  लें तो  
 $x = 1, y = 1, z = 1$  और  $u = 50$

(ii) यदि  $t = -208, t' = -206$  और  $t'' = -55$  लें तो  
 $x = 2, y = 0, z = 6$  और  $u = 4u$

क्योंकि सबका हिस्सा है और यहाँ हमें  $y = 0$  मिल रहा है तो हम इस हल को स्वीकार नहीं करेंगे।

(iii)  $t = -180, t' = -105$  और  $t'' = 15$  लें तो  
 $x = 30, y = 45, z = 75$  और  $u = 60$  मिलता है।

इस प्रकार हमें कई हल मिलते हैं, किन्तु केवल अंतिम हल ही स्वीकार करने योग्य है, जो कि श्रीधराचार्य ने भी दिया है।

### उदाहरण-2

एकस्थार्धप्रस्थस्त्रयंशोऽन्यस्यापरस्य नवभागः।

सप्तदशशतानिफलंपृथक्पृथक्किं भवेत्तेशाम्॥ (मिश्रक व्यवहार, सूत्र-72, पृष्ठ-74)

अर्थात् यदि तीन हिस्सेदार क्रमशः आधे प्रस्थ, एक तिहाई प्रस्थ तथा  $1/9$  प्रस्थ का योगदान करें और कुल उत्पादन 1700 प्रस्थ हो तो प्रत्येक को अलग-अलग कितने प्रस्थ मिलेंगे?

श्रीधराचार्य का हल- उदाहरण-1 की ही भांति सभी के हिस्से को भाग देकर प्रत्येक को 1700 से गुणा करने पर हल प्राप्त होगा।

सभी हिस्से का योग  $(1/2) + (1/3) + (1/9) = 17/18$

$$\text{पहले का हिस्सा } (1/2) \div (17/18) \times 1700 = 900$$

$$\text{दूसरे का हिस्सा } (1/3) \div (17/18) \times 1700 = 600$$

$$\text{तीसरे का हिस्सा } (1/9) \div (17/18) \times 1700 = 200$$

डायोफैंटाइन समीकरण बनाकर हल-माना कि तीनों हिस्सेदारों के कुल प्रस्थ क्रमशः  $x, y$ , और  $z$  हैं तो

$$(1/2)x + (1/3)y + (1/9)z = 1700$$

$$\text{या } 9x + 6y + 2z = 30600$$

जिसका व्यापक हल है

$$x = 306 + 2t$$

$$y = -1224 - 9t + t'$$

$$z = 2448 + 18t - 3t'$$

जहाँ  $t, t' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

यदि  $t$  और  $t'$  के अलग-अलग मान लें तो उदाहरण के तौर पर

$$(i) t = -15299, t' = -15290 \text{ तो } x = 2, y = 1, z = 15288$$

उस प्रकार यहाँ भी कई हल मिलते हैं किन्तु स्वीकार करने योग्य वही है जो श्रीधराचार्य ने दिया है।

### उदाहरण-3

त्रिभिःपारावतः पुचपंचभिः सप्तसारसाः। सप्तभिर्नवहंसाश्चनवभिर्विहरणस्त्रयः॥  
राजपुत्रविनोदार्थज्ञात्वामूल्यं यथोदितम्। शतेनैकेन रूपाणांजीवनां शतमानय॥  
(मिश्रक व्यवहार, सूत्र-78, 79, पृष्ठ-80)

अर्थात् यदि 5 कबूतर 3 रू0 में, 7 सारस 5 रू0 में, 9 हंस 7 रू0 में तथा 3 मोर 9 रू0 में मिल रहे हों और राजकुमार के मनोविनोद हेतु 100 रू0 में 100 पक्षी खरीदने हों तो प्रत्येक पक्षी की संख्या बताओ?

**श्रीधराचार्य का हल:** माना कि कबूतरों, सारसों, हंसों और मोरों की संख्या क्रमशः  $5x, 7y, 9z$  और  $3u$  है जो सब मिलाकर 100 है और प्रत्येक के दाम  $3x, 5y, 7z$  और  $9u$  रुपए हैं जो सब मिलाकर 100 है।

$$5x + 7y + 9z + 3u = 100$$

$$3x + 5y + 7z + 9u = 100$$

$u$  को दोनों समीकरण से हटाने पर

$$12x + 16y + 20z = 200$$

$$\text{या } 3x + 4y + 5z = 50$$

श्रीधराचार्य इसके 16 हल देते हैं, पर ये सभी हल परीक्षण से प्राप्त होते हैं।

x	y	z	U
3	4	5	4
11	3	1	5
1	8	3	4
6	3	4	13/3
2	6	4	4
4	2	6	4
3	9	1	13/3
7	6	1	7
4	7	2	3/3
8	4	2	7
12	1	2	5
5	5	3	13/3
9	2	3	7
7	1	5	13/3
1	3	7	11/3
2	1	8	11/3

## शोध पत्र

डायोफैंटाइन समीकरण बनाकर हल :

मना  $x, y, z$  और  $u$  क्रमशः कबूतरों, सारसों, हंसों और मोरों की गिनती हैं, तो

$$\begin{aligned}x + y + z + u &= 100 \\(3/5)x + (5/7)y + (7/9)z + (9/3)u &= 100\end{aligned}$$

$u$  को हटाने पर

$$189x + 180y + 175z = 15750$$

जिसका व्यापक हल है।

$$x = -15750 + 5t'$$

$$y = 598500 - 189t' + 35t$$

$$z = -598500 + 189t' - 36t$$

$$u = 15850 - 5t' + t'$$

जहाँ  $tt' = 0, \pm 1, \dots$

यहाँ देखा जा सकता है कि यदि संख्याएं बहुत बड़ी बड़ी हैं तो श्रीधराचार्य के समीकरण

$$3x + 4y + 5z = 50$$

को हल करना ही बेहतर होगा।

### उदाहरण-4

द्वाभ्यामैक त्रिभिपंचतथैकेनफलद्वयम्।

दाडिमाम्रकपित्थानामशीत्या शतमानय।।(मिश्रक व्यवहार, सूत्र-80, पृष्ठ-83)

यदि अनार, आम और बेल क्रमशः 2 रू0 में एक, 3 रू0 में 5 तथा 1 रू0 में 2 मिलते हों और 80 रू0 में 100 फल लाने हों तो प्रत्येक फल की संख्या बताओ?

यदि  $x, 5y$  और  $2z$  क्रमशः अनार, आम और बेल हैं और उनकी कीमत  $2x, 3y$  और  $z$  रू0 है तो

$$\begin{aligned}x + 5y + 2z &= 100 \\ \text{और} \quad 2x + 3y + z &= 80\end{aligned}$$

यदि  $x$  को समीकरण से हटा दें तो

$$7y + 3z = 120 \text{ मिलता है।}$$

श्रीधराचार्य ने  $y$  और  $z$  के निम्नलिखित 4 हल दिये हैं-

$y$	$z$
9	19
3	33
6	26
15	5

$y$  और  $z$  के ये मान रखने पर  $x$  के मान निकाले जा सकते हैं।

डायोफैंटाइन समीकरण बना कर हल-

$7y + 3z = 120$  को हल करने पर व्यापक हल मिलता है

t	x	y	z
-35	15	15	5
-36	16	12	12
-37	17	9	19
-38	18	6	26
-39	19	3	33

वही श्रीधराचार्य ने सिर्फ 4 हल दिये हैं।

2. **निष्कर्ष**— श्रीधराचार्य ने पाटीगणित में डायोफैंटाइन समीकरण का हल बड़ी सरलता से किया है पर समस्त हल परीक्षण के आधार से निकले हैं। कहीं-कहीं पर मात्र एक ही हल दिया है। कुछ प्रश्नों में श्रीधराचार्य के समीकरण अधिक सरल हैं तो उनको हल करना भी आसान है पर डायोफैंटाइन समीकरण बनाकर हल करने पर व्यापक हल मिलता है जो समस्त संभव हल देता है किन्तु उनमें से अधिकांश में श्रीधराचार्य द्वारा दिये हल ही स्वीकारणीय है।

**आभार**—लेखिका श्री अखिलेश वर्मा और श्री टी0एन0 मिश्र जी की आभारी है। यह शोध पत्र अपने गुरु प्रो0 के0 एस0 शुक्ल को समर्पित है।

### References

1. The Pati Ganita of Shri Dharacharya (1959) Hindu Astronomical and Mathematics Text Series Number 2, Department of Mathematics and Astronomy, Lucknow University, 1959.
2. Rosen, Kenneth H. (2015) Elementary Number Theory, Sixth Edition, Pearson.
3. Bhushan, Vibhuti and Singh, AwadheshNarain (2004) The History of Hindu Mathematics, vol. 2, Bharat Kala Prakashan.