खण्ड-12, अंक-1, वर्ष-2024, मु0प्र0 144-147
D.O.I.: https://doi.org/10.22445/avsp.v12i1.22
SJIF (2024) : 8.287

Some Fascinating Numbers and their Importance

Priti Bajpai
Department of Mathematics, BITS Pilani, Dubai, UAE
dr.priti.bajpai@gmail.com

Received: 20-08-2024, Accepted: 26-10-2024

Abstract- We are already familiar with Rational, Irrational and Complex numbers but there are a few numbers which are quite fascinating and unlike others. Not everyone knows about them but they are quite often used in branches of Mathematics like Elementary Number Theory, Computational Number Theory, and Computer Science etc. and have a lot of their own importance there. In this article we will see what some of these numbers are and where are they used.

Key words- Gaussian integer, Gaussian prime, Fermat pseudo prime, Eulers pseudo prime

कुछ अद्भुत संख्याए तथा उनका महत्व

प्रीति बाजपेई
गणित विभाग, बिट्स पिलानी, दुबई, यू0ए0ई0
dr.priti.bajpai@gmail.com

सार– परिमेय, अपरिमेय व सम्मिश्र संख्याएं हमारे लिए नई नहीं हैं, पर कुछ संख्याएं ऐसी भी हैं जो कुछ विशिष्ट हैं। सामान्य जन उन्हें जानता तो नहीं, पर उनका प्रयोग एलिमेन्टरी नंम्बर थ्योरी ,कम्प्यूटेशनल नंम्बर थ्योरी, व कम्प्यूटर साइंस, आदि कई शाखाओं में प्रचुर रूप में होता है और उनका बहुत महत्व है। यहाँ कुछ उन्हीं संख्याओं एवं उनके उपयोग से अवगत कराया गया है।

बीज शब्द– गॉसियन इंटीजर, गॉसियन प्राइम, फर्मा स्यूडो प्राइम, इयूलर्स स्यूडो प्राइम

1. परिचय–

1.1 **गौसियन इन्टीजर**– पूर्णांक संख्याए जिन्हें इन्टीजर कहते हैं, उनसे तो आप परिचित हैं ही, तो फिर गौसियन इन्टीजर क्या है? वो संख्याएं जिनका रूप **a+bi** हो, जहाँ **a** और **b** पूर्णांक हो और **i =√-1** को **गौसियन इन्टीजर** कहते हैं। इस प्रकार की संख्याएं को ग्रीक प्रतीकों α , β , γ , δ आदि से दर्शाया जाता है। ये संख्याएं जोड़, घटाव व गुणा के लिए तो क्लोजर प्रौपर्टी को निभाते है, पर भाग के लिए इनकी अलग ही प्रक्रिया है। उदाहरण के लिए α , β को तभी भाग देगा जब हमें एक ऐसी G.I. संख्या γ मिले जिससे β , $\alpha\gamma$ के बराबर हो जाए, यानि $\beta = \alpha\gamma$

जैसे $\mathbf{4+}i$, $\mathbf{9-2}\,i$ को तभी भाग देगा जब एक ऐसा G.I. मिले जो $\mathbf{4+}i$ से गुणा करके $\mathbf{9-2}\,i$ दे। आप देख सकते हैं, $\mathbf{2-}i$ एक ऐसा G.I. है।

$$9-2i=(4+i)(2-i)$$

निष्कर्ष यह है कि, $\mathbf{4+}i$, $\mathbf{9-2}\,i$ को भाग देगा और हमें $\mathbf{2-}i$ एक G.I. मिलेगा।

यूनिट गौसियन इन्टिजर

1, –1, i **और** $-i$ को **यूनिट गौसियन इन्टीजर** कहते हैं।[1–7]

1.2 **गौसियन प्राइम G.P. (Gaussian Prime)**–

जिस शून्येत्तर गौसियन इन्टीजर **g** के आठ भाजक : $\pm 1, \pm i, \pm g, \pm ig$ होते हैं उन्हें **गौसियन प्राइम** कहते हैं। या फिर उस सकारात्मक पूर्णांक को गौसियन प्राइम कहते हैं जो खुद भी प्राइम हो और

3 (mod 4) से कौनग्रुएन्ट हो। अर्थात् **4 n + 3** के प्रकार का हो।

अथवा **a +** i **b** गौसियन प्राइम होगा अगर $a^2 + b^2$ प्राइम हो।

या फिर i **b** गौसियन प्राइम है, अगर $|b|$ साधारण प्राइम हो और **3 (mod 4)** के कौनग्रुएन्ट हो।

या **a** एक गौसियन प्राइम होगा जब $|a|$ साधारण प्राइम हो और $|a| \equiv 3 \pmod 4$ संतुष्ट होता हो।

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43 आदि खुद भी प्राइम है और गौसियन प्राइम भी।

उदाहरण के लिए यदि आप ऊपर लिखी संख्याओं को जाँचना चाहते हैं तो देखिये

$$4\,(0) + 3 = 3$$
$$4\,(1) + 3 = 7$$
$$4\,(2) + 3 = 11$$
$$4\,(4) + 3 = 19$$

पर **13** एक गौसियन प्राइम नही है आप खुद जाँच सकते हैं।

तो अब यह सवाल आता है कि इन अद्‌भुत संख्याओं को हम कहाँ प्रयोग में लाते हैं ?

गौसियन इन्टीजर बहुत सी डायोफैंटाइन समीकरणों के हल को निकालने में प्रयोग की जाती हैं। यही नही इनका प्रयोग किसी सकारात्मक पूर्णांक को दो वर्गों के जोड़ में लिखने के लिए भी करते हैं।

1.3 स्यूडोप्राइम (Pseudoprime)–

प्राइम नम्बरों से तो सभी परिचित हैं, पर स्यूडोप्राइम क्या होते हैं, इसको समझना पड़ेगा।

वो संख्याएं जो प्राइम नहीं होती पर उन्हीं की तरह का आचरण करती हैं, को स्यूडोप्राइम कहते हैं। यदि **a** एक सकारात्मक संख्या हो, **n** एक भाज्य संख्या हो जो कौनग्रुएंस

$a^n \equiv a \pmod n$ को संतुष्ट करे तो n को स्यूडोप्राइम बेस **a** कहते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि **a = 3 , n = 91** जो कि प्राइम नही है तो देखा जा सकता है कि

$$3^{91} \equiv 3 \pmod{91}$$

क्योंकि **91 = 7 x 13** , और **gcd(3 , 91) = 1** तो

$3^{91} \equiv 3 \pmod{91}$ संतुष्ट होता है।

1.4 फर्मेट स्यूडोप्राइम (Fermat Pseudoprime)–

यदि कोई Fermat Little Theorem को याद करे तो वह यह कहता है कि,अगर **a** कोई समान्तर इन्टीजर है और **gcd(a , p) = 1** तो $a^p \equiv a \pmod p$। यदि **p** के स्थान पर कोई भी समान्तर पूर्णांक **n** ले और यह कौनग्रुएंस $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ संतुष्ट होती है तो वह **n फरमा स्यूडो प्राइम** कहलाएगा बेस **a** पर।

उदाहरण के लिए–

$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, यहाँ 341 प्राइम नहीं है। **341** को **फरमा स्यूडो प्राइम बेस 2 कहेंगे**। यह ध्यान देने वाली बात है कि एक ही बेस पर बहुत कम स्यूडो प्राइम मिलते हैं।

1.5 औइलर स्यूडो प्राइम (Euler's Pseudoprime)–

यदि **n** एक विषम सकारात्मक मिश्रित पूर्णांक संख्या है (odd positive composite integer) और **a** भी सकारात्मक पूर्णांक है तब यदि

$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \pmod{n}$ संतुष्ट होता है, तो **n** को **औइलर स्यूडो प्राइम** कहते हैं। यह ज्ञात है कि $\left(\frac{a}{n}\right)$ को जकोबी सिम्बल कहते हैं।

यदि **n = 561 , a = 2,** तो

$$2^{\frac{561-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{561}\right) \pmod{561}$$

क्योंकि $\left(\frac{2}{561}\right) = 1$ है, इसीलिए

$2^{280} \equiv 1 \pmod{561}$ संतुष्ट होता है और **561 औइलर स्यूडो प्राइम** है।

1.6 स्ट्रौंग स्यूडो प्राइम (Strong Pseudoprime)–

वह मिश्रित (composite) संख्या जो मिलर–राबिन (Miller Rabin) प्राइमैलिटी टेस्ट को संतुष्ट करते हैं पर खुद प्राइम नही होते उनको **स्ट्रौंग स्यूडो प्राइम** कहते हैं। उदाहरण के तौर पर 2047, 3277, 4033------आदि **स्ट्रौंग स्यूडो प्राइम** हैं। ध्यान देने की बात है कि–

1. एक ही बेस पर स्ट्रौंग स्यूडो प्राइम, औइलर स्यूडो प्राइम होता है पर उल्टा हर समय सम्भव नहीं है। उल्टा तभी सम्भव होता है, जब **n ≡ 3 (mod 4)** हो, या फिर **n** एक औइलर स्यूडो प्राइम बेस **a** हो और $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ हो।

2. एक ही बेस पर हर औइलर स्यूडो प्राइम, स्यूडो प्राइम होता है पर हर स्यूडो प्राइम औइलर स्यूडो प्राइम नहीं होता है। अर्थात्

स्ट्रौंग स्यूडो प्राइम $\longrightarrow$ औइलर स्यूडो प्राइम $\longrightarrow$ स्यूडो प्राइम

पर उल्टा हर समय सम्भव नहीं है।

1.7 कौनग्रुएंट संख्याए (Congruent Numbers)– किसी सकारात्मक पूर्णांक **N** को कौनग्रुएंट नम्बर कहते हैं, यदि वह किसी समकोण त्रिभुज (Right angle triangle) जिसकी भुजाएं परिमेय संख्या हो का क्षेत्रफल हो। उदाहरण के लिए **6** एक कौनग्रुएंट नम्बर है क्योंकि वह क्षेत्रफल है एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएं **3 , 4 और 5** हैं।

इसका जिक्र सबसे पहले अरबीहस्त सीपियों (972 AD) में देखने को मिलता है। वहाँ 30 ऐसी संख्याओं का जिक्र है–

5, 6, 14, 15, 21, 30, 34, 65, 70------- सभी कौनग्रुएंट नम्बर हैं।

अभी तक **10374** सबसे बड़ा कौनग्रुएंट नम्बर है।

फर्मा (Fermat) ने यह सिद्ध किया था कि **1, 2 और 3** कौनग्रुएंट नम्बर नहीं है। उधर फिबोनाची (Fibonacci) ने दिखलाया कि **7** एक कौनग्रुएंट नम्बर है और यह भी साबित किया कि कोई भी वर्ग संख्या (square number) कौनग्रुएंट संख्या नहीं हो सकती। यह भी जानना आवश्यक है कि कौनग्रुएंट नम्बरों का क्यों महत्व है। दरअसल इनका प्रयोग अलजबराइक कर्वस (algebraic curves) पर परिमेय बिन्दुओं को पता लगाने में होता है और उनसे पाइथागोरस त्रिपलेट (Pythagoras Triplets) पता लगाए जा सकते हैं।

1.8 **परफेक्ट नम्बर (Perfect Numbers)**– यूनानी लोग संख्याओं को रहस्यमय मानते थे। वह यह जानने में उत्सुक थे कि वो कौन सी पूर्णांक संख्याएं हैं जो अपने भाजकों के जोड़ के बराबर होती है। आज इन संख्याओं को परफेक्ट नम्बर कहते हैं। आप $\sigma(n)$ जिसको सम्मेशन फंक्शन (Summation function) कहते हैं, जानते ही हैं।

यदि $\sigma(n) = 2n$, तो n को परफेक्ट नम्बर कहते हैं।

उदाहरण के लिए:–

$$\sigma(n) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$$
$$\sigma(n) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$$

ते 6 और 28 को परफेक्ट नम्बर हैं। यहाँ एक नतीजे को जानना आवश्यक है। प्रत्येक सकारात्मक पूर्णांक **n** परफेक्ट नम्बर तभी होता है जब

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$, जहाँ $n \geq 2$ और $2^m - 1$ प्राइम है।

आभार – लेखिका श्री टी0एन0 मिश्र और श्री अखिलेश वर्मा जी की सहायता के लिए आभारी है।

References

1. Singh, Kuldeep (2000) Number Theory, Oxford University Press.
2. Rosen, Kaneth H. (2014) Elementary Number Theory, Sixth Edn., Pearson.
3. https://www.youtube.com/watch?v=oLmpTRg1d6E
4. https://www.youtube.com/watch?v=EWaQTyYc8_I
5. https://www.youtube.com/watch?v=FhWZUvTR7d0&t=315s
6. https://www.youtube.com/watch?v=KD6yp2WeZd8
7. https://youtube/EWaQTyYe8_1?si=6QpxO8wl\l7L2MMueP